



Nouvelle modélisation multiparticulaire pour l'analyse des efforts dans les plaques composites multicouches impactées

Mourad Smaoui

► To cite this version:

Mourad Smaoui. Nouvelle modélisation multiparticulaire pour l'analyse des efforts dans les plaques composites multicouches impactées. Modélisation et simulation. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. <tel-00529386>

HAL Id: tel-00529386

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529386>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 20421 (4)

X

DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSES

Spécialité : Structures et Matériaux

Thèse présentée par

Mourad SMAOUI

**NOUVELLE MODELISATION MULTIPARTICULAIRE POUR
L'ANALYSE DES EFFORTS DANS LES PLAQUES
COMPOSITES MULTICOUCHES IMPACTEES**

Soutenue le 25 Novembre 1996

Jury

F. LENE
M. HOGGE
R. GIBERT
A. EHRLACHER
T. NACIRI

Présidente du Jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

15

ENP.C.



INV04474

A mes parents
A mes amis
Au souvenir d'un ami lointain

Remerciements

Je remercie toutes les personnes qui m'ont encouragé pour initier ce travail et pour l'achever, et particulièrement les membres de ma famille.

Je remercie l'équipe du laboratoire CERAM pour la convivialité avec laquelle elle m'a reçu pendant les trois années de thèse.

Je remercie particulièrement Alain et Taieb pour l'apport et le soutien qu'ils m'ont apportés durant ce travail.

Je remercie les membres du Jury pour avoir accepté d'en faire partie.

Je remercie enfin tous ceux qui ont été présents à l'exposé final, et dont pour certains le voyage était long.

RESUME

On propose une modélisation numérique des plaques multicouches en matériaux composites lorsqu'elles sont soumises à l'impact de charges dynamiques. Cette modélisation permet de déterminer les efforts engendrés par l'impact, le but étant de pouvoir étudier certains endommagements comme le délaminage.

La nouvelle modélisation utilisée appelée modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches (M4), permet de modéliser l'objet tridimensionnel par une géométrie bidimensionnelle tout en augmentant le nombre de champs cinématiques. Elle fait apparaître de manière naturelle des efforts au niveau des interfaces entre les couches. Ces efforts peuvent être reliés au phénomène de délaminage.

L'analyse des résultats de la littérature permet de montrer que cette modélisation est pertinente dans le cas des chocs relativement rapides.

Un outil numérique a été réalisé sur la base de la méthode des éléments finis en dynamique. Le code éléments finis obtenu est ensuite validé, puis appliqué à l'analyse des efforts dans une plaque multicouche impactée. Nous montrons sur un exemple, la pertinence de cette modélisation et sa capacité à fournir de manière simple et rapide, des informations utiles pour l'étude des différents aspects du délaminage (initiation, propagation, étendue).

SUMMARY

We propose a numerical model of composite materials multilayered plates when submitted to the impact of dynamic loading. This model enables us to determine the stresses resulting from impact, in the aim to study some damages like delamination.

The new model used is called multiparticular modelisation of multilayered materials (M4). It considers the tridimensional object having a bidimensional geometry with increased number of kinetic fields. Stresses appear naturally at the interface between the layers. These stresses can then be related to the delamination phenomenon.

The bibliographic analysis shows that this model is pertinent for the relatively high velocity impacts.

For this model used, the dynamic numerical code is based upon the finite element method. The finite element code obtained is validated. After that, we use it to analyse stresses in an impacted multilayered plate. We show then from an example, that this model is pertinent and able to determine simply and rapidly usefull informations for the study of different aspects of the delamination phenomenon (initiation, propagation and delamination area).

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
PARTIE A	6
PRESENTATION DE LA MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES	6
I. MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES	7
I.1. CONSTRUCTION DU MODELE MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES (M4)	8
I.1.1. Premier niveau de construction: Définition de la géométrie et de la cinématique	8
a) Famille géométrique de l'objet	8
b) Nombre de particules de matériau	9
c) La microstructure des particules de matériau	9
d) Les liaisons internes	9
I.1.2. Deuxième niveau de construction: Définition des efforts	10
a) Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels	10
b) Choix des formes linéaires définissant les efforts	11
c) Application du Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.)	16
I.1.3. Troisième niveau de construction: Le comportement	17
I.1.4. Equations du modèle M4 découplé	19
I.2. PRÉSENTATION DU MODELE M4 SIMPLIFIÉ (M4S)	20
I.2.1. Obtention du modèle M4s par simplification du modèle M4 découplé	20
I.2.2. Identification des rigidités d'interface du M4s	21
I.2.3. Equations du M4s	25
I.3. FORMULATION EN DYNAMIQUE DU M4 DECOUPLÉ PAR ÉLÉMENTS FINIS	25
I.3.1. Formulation variationnelle du M4 découplé	26
I.3.2. Équation éléments finis du M4 découplé en dynamique: $M\ddot{U} + KU = F$	28
I.3.3. Prise en compte au niveau des éléments finis de la simplification du modèle découplé: le modèle simplifié M4s	30
I.3.4. Prise en compte des conditions aux limites et technique de résolution en statique	32
II. VALIDATION DU MODELE M4 EN STATIQUE	35
II.1. VALIDATION EN STATIQUE DE LA MAILLE M4: CAS D'UNE POUTRE CONSOLE [0/90] EN FLEXION	36
II.1.1. Résolution analytique du problème à l'aide du M4s	36
II.1.2. Comparaison entre les résultats analytiques et les résultats numériques du M4s	39
II.2. VALIDATION EN STATIQUE DE LA MAILLE M4 ET DU MODELE M4S: CAS D'UNE PLAQUE [0/90] _s EN TRACTION	41
II.2.1. Résolution analytique par le M4s	42
II.2.2. Comparaison entre les résultats analytiques et numériques du M4s pour le calcul à l'interface	45
II.2.3. Validation du modèle M4s en statique: Comparaison aux résultats des modèles de Pagano et de Wang et Crossman	46
II.3. VALIDATION DU MODELE M4S EN STATIQUE: CAS D'UNE PLAQUE [90/0] _s TROUÉE EN TRACTION UNIFORME	48
II.3.1. Le problème étudié	48
II.3.2. Validation du calcul des contraintes membranaires à partir d'une solution analytique de Lekhnitskii	50
II.3.3. Validation du calcul des contraintes d'interface à partir d'une solution éléments finis 3D	52
II.4. CONCLUSION	56

MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES PLAQUES MULTICOUCHES IMPACTEES

III. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE	58
III.1. INTRODUCTION DU PHENOMENE D'IMPACT SUR PLAQUES MULTICOUCHES	59
III.1.1. Classification classique des impacts sur plaques multicouches	59
III.1.2. Classification phénoménologique des impacts sur plaques multicouches	61
III.1.3. Conclusion	64
III.2. INFORMATIONS EXPERIMENTALES SUR L'IMPACT DES PLAQUES MULTICOUCHES	64
III.2.1. Les machines et les techniques expérimentales utilisées	65
a) Pendule de Charpy	65
b) Test d'Izod	65
c) Chute de poids (test de Gardner...)	65
d) Test à la machine hydraulique	65
e) Test aux barres de Hopkinson	66
f) Test au canon à gaz	66
III.2.2. Les structures étudiées	66
III.3.2. Quelques observations expérimentales sur l'impact des plaques multicouches	67
a) Détermination expérimentale de la réponse globale	67
b) Etudes expérimentales sur la propagation d'ondes	67
c) Etude des endommagements causés par l'impact	68
III.3. LES LOIS DE CONTACT	70
III.3.1. Dérivation analytique de la loi de contact	70
VI.3.2. Dérivation expérimentale de la loi de contact: Les lois de Yang et Sun	71
III.3.3. Possibilité de l'Introduction de la force de contact comme donnée du problème	74
III.3.4. Influence sur la réponse d'une définition précise de la loi de contact	76
III.4. LES MODELES MATHEMATIQUES UTILISES	77
III.4.1. Les modèles simples de type masse-ressort	77
III.4.2. Les approches par propagation d'ondes	80
III.4.3. Modèles analytiques de type poutre ou plaque	83
a) Cas des poutres isotropes	83
b) Cas des plaques isotropes	84
c) Cas des plaques multicouches	84
d) Conclusion	86
III.4.4. les Modèles numériques d'élasticité 2D et 3D	86
a) Les modélisations à méthode directe	86
b) Les modélisations à méthode indirecte	87
c) Les approches par modes propres	87
d) Le calcul éléments finis par intégration directe	89
III.5. CONCLUSION	91
IV. RESOLUTION THEORIQUE DE L'ÉQUATION ÉLÉMENTS FINIS $M\ddot{U}+KU=F$	94
IV.1. CHOIX DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION	94
IV.1.1. Les méthodes directes	95
IV.1.2. Les méthodes indirectes	95
IV.1.3. Choix entre les méthodes directes et indirectes	96
IV.2. L'INTÉGRATION DANS LE TEMPS DE L'ÉQUATION $M\ddot{U}+KU=F$	97
IV.2.1. Le schéma de discrétisation des différences centrales	97
IV.2.2. Le schéma de discrétisation de Houbolt	99
VII.2.3. Le schéma de discrétisation de Wilson- θ	100
IV.2.4. Le schéma de discrétisation de Newmark	101
IV.2.5. Critères du choix du schéma de discrétisation dans le temps	103
IV.3. POSSIBILITÉS DE CHOIX DE LA STRUCTURE DE LA MATRICE MASSE	104

IV.4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $M\ddot{U}+KU=F$ DANS LE CAS D'UN CONTACT DE TYPE HERTZ	105
IV.5. L'ALGORITHME DE RÉSOLUTION EN DYNAMIQUE (Cas du schéma de Newmark)	109
V. VALIDATION EN DYNAMIQUE DU CODE ÉLÉMENTS FINIS	111
V.1. INTRODUCTION	111
V.2. LES DONNÉES DU PROBLÈME	113
V.3. LA SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME	114
V.4. COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUES ET NUMERIQUES	116
V.4.1. Paramètres de modélisation	116
V.4.2. Confrontation des résultats numériques du M4s aux résultats analytiques	117
V.4.3. Conclusion	122
V.5. INFLUENCE DES PARAMETRES DE MODELISATION	124
V.5.1. Influence du choix du pas de temps Δt	124
V.5.2. Influence de la discrétisation dans l'épaisseur	126
V.5.3. Effet de la localisation et de la répartition de la pression de contact	129
V.5.4. Conclusion	131
VI. INFLUENCE DES PARAMÈTRES D'IMPACT SUR LA RÉPONSE GLOBALE D'UNE PLAQUE ISOTROPE	132
VI.1. INFLUENCE DES PARAMÈTRES SE RÉFÉRANT AU PROJECTILE	132
VI.1.1. Influence de la vitesse du projectile	132
VI.1.2. Influence de la masse du projectile	134
VI.1.3. Étude quantitative de l'influence de la vitesse et du rayon du projectile	136
a). Approche analytique simplifiée	136
b). Comparaison de l'approche numérique M4s et de l'approche analytique simplifiée	137
VI.2. INFLUENCE DES PARAMÈTRES SE RÉFÉRANT A LA PLAQUE	139
VI.2.1. Influence de la valeur de la rigidité aux interfaces	139
VI.2.2. Influence de l'épaisseur totale de la plaque	141
VI.2.3. Influence du type de conditions aux limites imposées	143
VII. EXEMPLE D'ÉTUDE PAR LE M4S D'UN PROBLÈME D'IMPACT SUR PLAQUES MULTICOUCHES	146
VII.1. IDENTIFICATION ET INFLUENCE DES PARAMETRES DE MODELISATION DE L'EXEMPLE D'ÉTUDE	146
VII.1.1. Le problème étudié	147
VII.1.2. Identification des paramètres de la loi de contact	148
a) Identification du coefficient de contact k_c en phase de chargement	148
b) Identification des coefficients intervenant dans la loi d'indentation en décharge et en phase de rechargement	151
VII.1.3. Identification des conditions aux limites expérimentales imposées	155
VII.1.4. Influence de la valeur de la rigidité d'interface	157
VII.1.5. Influence de la finesse du maillage utilisé	158
VII.2. ÉTUDE DU DÉLAMINAGE DE LA PLAQUE MULTICOUCHE IMPACTÉE	161
VII.2.1. Initiation du délaminage	162
a) Point d'initiation du délaminage	162
b) Effet des paramètres d'impact sur la répartition de la contrainte τ autour de la zone d'impact	169
VII.2.2. Ondes de flexion et propagation du délaminage	172
a) Naissance et propagation des ondes de flexion	172
b) Influence des paramètres d'impact sur les ondes	175
c) Conclusion	181
VII.2.3. Étendue de la surface délaminée	182
a) Le contact multiple	183
b) Influence des paramètres d'impact sur la réponse globale	183
c) Conclusion	188
VII.3. CONCLUSION	189

ANNEXE I.A	195
ANNEXE I.B	199
ANNEXE I.C	205
ANNEXE III	213
TABLE DES FIGURES	215
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	220

INTRODUCTION

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux: une matrice et un renfort. Le renfort (ou matériau renforçant) possède habituellement des propriétés mécaniques supérieures à celles de la matrice. Les deux matériaux se complètent et permettent d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément (la rigidité, la résistance, la masse, les propriétés en fatigue, la résistance à l'impact...).

Les plaques multicouches (ou stratifiées) auxquelles nous nous intéressons ici sont constituées par l'empilement de plusieurs couches, où chaque couche est constituée d'une matrice dans laquelle baignent des fibres parallèles orientées selon une certaine direction, qui peut changer d'une couche à l'autre.

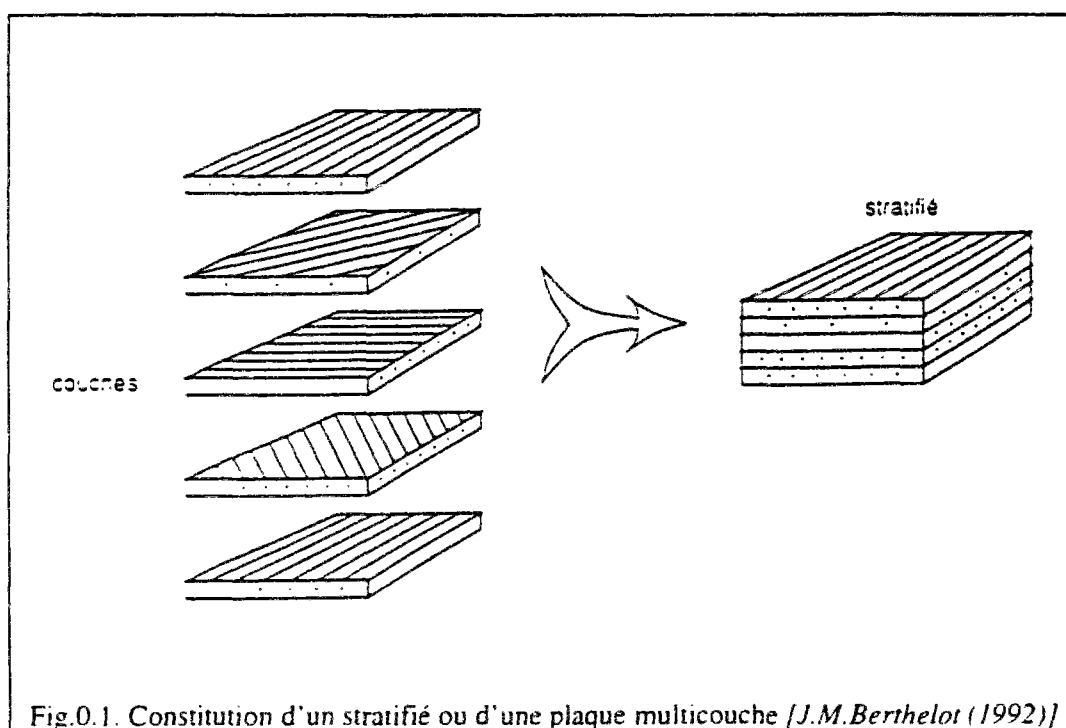


Fig.0.1. Constitution d'un stratifié ou d'une plaque multicouche [J.M.Berthelot (1992)]

La plaque multicouche ainsi obtenue présente des directions préférentielles au point de vue résistance et rigidité. Dans ce travail, nous désignerons par interface la limite entre deux couches successives de même orientation ou d'orientations différentes.

Grâce à ces avantages et à ces propriétés, les matériaux composites à fibres renforcés ont commencé ces dernières années à remplacer et à succéder aux matériaux traditionnels (acier, aluminium) dans beaucoup de domaines tels que l'aéronautique et le spatial (satellites, avions, missiles...), le transport (trains,

T.G.V., industrie automobile...), le B.T.P., l'électricité, l'électronique ou encore les équipements sportifs.

Soumises à l'impact de charges dynamiques, les plaques multicouches se trouvent être le siège de phénomènes d'endommagement, et notamment de délaminage à l'interfaces entre les couches différemment orientées. Les propriétés mécaniques du matériau se trouvent alors diminuées et des problèmes de sécurité se posent.

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés au problème des plaques multicouches impactées, surtout ces deux dernières décennies. Malgré la multitude d'études expérimentales, analytiques et numériques menées, le phénomène de l'impact sur les plaques multicouches reste encore mal compris.

Les difficultés de compréhension du phénomène sont liées d'une part au concept d'impact et d'autre part à la nature des matériaux utilisés.

Le concept d'impact est en effet différent des concepts de statique et de chargement rapide.

Un chargement statique peut être assimilé à une succession d'états d'équilibre, alors que dans l'impact, nous devons tenir compte de l'effet d'inertie.

Un chargement rapide quant à lui n'est généralement pas généré par une collision. Il implique alors des temps de chargement beaucoup plus longs que dans le cas de l'impact.

Les difficultés liées à la nature des matériaux viennent de la manière avec laquelle les matériaux composites répondent à l'impact et dissipent l'énergie cinétique incidente. Cette manière diffère de celle des matériaux plus traditionnels tels que les métaux sur plusieurs points:

- une énergie cinétique modérée se traduit dans les métaux par des déformations élastiques et plastiques. Les déformations plastiques donnent naissance à des déformations permanentes, mais ces dernières n'affectent généralement que peu la résistance de la structure. Dans le cas des matériaux composites par contre, une telle énergie cinétique est fréquemment créatrice de larges zones d'endommagement, avec réduction de la résistance et de la rigidité.

- pour les structures métalliques soumises à l'impact, l'endommagement s'initie à la surface impactée et peut être détecté visuellement. Avec les matériaux composites, d'autres formes d'endommagement peuvent exister tels que le délaminage, la fissuration et la rupture de fibres. L'endommagement peut alors s'initier à l'intérieur ou sur la partie inférieure de la structure et demeurer invisible [A.W.H.Morris & R.S.Smith (1971)].

Devant ces difficultés et la mauvaise compréhension du phénomène, les constructeurs ont été amenés à adopter des coefficients de sécurité élevés en dynamique, ce qui a limité l'utilisation des structures multicouches en dynamique. Une meilleure connaissance du comportement des matériaux multicouches en dynamique et de leur résistance à l'impact, est devenue une préoccupation pour les chercheurs et le sujet de plusieurs études menées ces dernières années (plus de 300 articles entre 1990 et 1993).

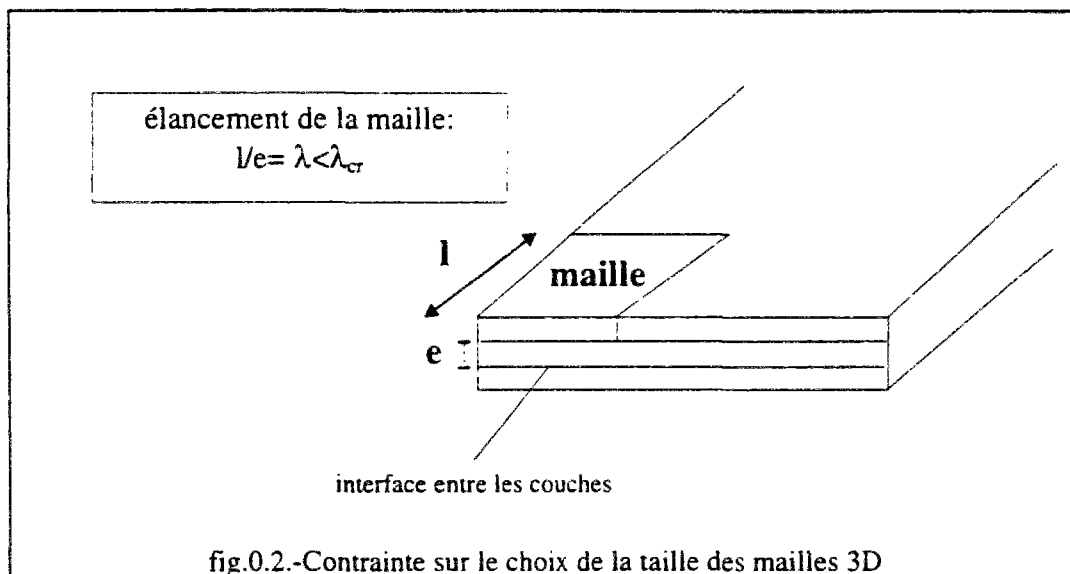
Les études expérimentales sont encore peu nombreuses. Les résultats sont caractérisés par une dispersion qui limite leur utilisation.

Les études analytiques se limitent à des cas simplifiés qui ne reproduisent pas les cas généralement rencontrés en pratique.

Les études numériques sont variées. Les plus nombreuses et les plus efficaces utilisent la technique des éléments finis. Les modèles mécaniques utilisés sont alors bidimensionnels ou tridimensionnels.

Les études par éléments finis bidimensionnels perdent leur efficacité quand il s'agit de calculer les contraintes transverses (par rapport au plan de la plaque) au niveau des interfaces entre les couches. Or, ce sont ces contraintes qui sont responsables de l'initiation du délaminage, forme principale d'endommagement des structures multicouches impactées [S.Abrate (1991, 1994), C.A.Ross & col. (1985), S.P.Joshi & C.T.Sun (1985), F.K.Chang & col. (1990)].

L'alternative consistant à effectuer des calculs par éléments finis tridimensionnels reste très lourde à mettre en oeuvre, puisque la géométrie est tridimensionnelle. De plus, cette alternative est très coûteuse en temps de calcul. En effet, l'épaisseur des couches étant faible (100 à 500 microns environ), le respect d'un certain élançement $\lambda < \lambda_{cr}^*$ dans les directions parallèles à la plaque impose d'adopter des mailles très petites (fig.0.2).



La structure possède alors un très grand nombre de degrés de liberté (ddl).

Par ailleurs, la résolution des équations en dynamique fait intervenir le facteur temps t . Pour résoudre ces équations, on subdivise l'intervalle de temps d'étude en pas Δt égaux, et on résout les équations à chaque pas de temps. Le pas Δt de

* élançement critique qui varie d'un code éléments finis à l'autre. Il est d'environ 30 ou 40 dans les codes usuels.

discrétisation dans le temps dépend de la taille des mailles. Pour assurer la précision des calculs, la faible taille (épaisseur) des mailles 3D impose de choisir un faible pas Δt d'intégration des équations dans le temps. Cela implique alors des temps de calcul encore plus longs, puisque la durée des calculs est inversement proportionnelle à ce pas Δt [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

Pour pallier à ces difficultés, un modèle multiparticulaire des matériaux multicouches, baptisée M4, a été proposée dans le cadre de la statique [A.Ehrlacher (1993)]. Ce modèle décrit la plaque multicouche par une géométrie bidimensionnelle, dans laquelle chaque point de matière contient autant de particules qu'il y a de couches. La cinématique est riche et l'application du Principe des Puissances Virtuelles fait apparaître de manière naturelle des efforts à l'interface.

L'objectif de ce modèle est double:

- pallier à la difficulté de mise en oeuvre des modèles 3D en modélisant l'objet étudié par une géométrie bidimensionnelle, en assurant par la même des calculs plus rapides;
- pallier à la difficulté chez les modèles 2D de décrire correctement le phénomène de délaminage, et ceci en faisant apparaître de manière naturelle des efforts d'interface permettant une description facile et fiable de l'état de contrainte aux interfaces et du délaminage.

Notre travail, basé sur ce modèle, essaye de répondre à deux questions principales:

- la première est de savoir si le modèle M4 proposé est capable, à travers ces efforts d'interface, de décrire de manière simple et fiable le délaminage dans les structures multicouches. Autrement dit, les efforts d'interface que fait apparaître le modèle peuvent-ils effectivement être reliés au phénomène de délaminage aux interfaces?
- la deuxième est de savoir si le modèle proposé peut fournir de manière simple, rapide et précise des informations relatives au délaminage de ces structures multicouches lorsqu'elles sont soumises à l'impact de charges dynamiques.

La simplicité fait référence à la simplicité de mise en œuvre du modèle, puisque l'objet y est modélisé par une géométrie bidimensionnelle. La question de la rapidité et de la précision est un peu plus délicate. Deux questions essentielles sont sous-jacentes. La première est de savoir si la richesse de la cinématique du modèle proposé et les particularités qu'il présente (présence d'interfaces) ne conduirait pas à des restrictions sévères sur le choix du pas Δt . La deuxième est de savoir si le choix d'un pas de temps Δt large n'induirait pas une grande perte de précision dans les calculs.

Sans apporter une réponse définitive à ces deux questions, l'étude 'qualitative' que nous avons effectuée dans le cadre du stage de D.E.A. a permis d'entrevoir, en se plaçant dans des conditions particulières, que le modèle M4 proposé aurait probablement l'avantage sur un modèle 3D classique, de fournir des résultats certes un peu moins précis, mais beaucoup moins coûteux en temps de calcul [M.Smaoui (1993)]. Le travail que nous présentons ici fait suite à cette étude-là.

Dans sa première partie, nous commençons donc par présenter la construction, puis le développement par éléments finis du modèle multiparticulaire M4, tout en y introduisant des simplifications de façon à le rendre plus opératoire (chap.I).

Après s'être assuré de la fiabilité de la partie statique du code de calcul par éléments finis obtenue, nous essayons, en traitant quelques problèmes classiques dans le cadre de la statique, de répondre à la première des deux questions relative à la relation entre les efforts d'interface du modèle M4 et le délaminage (chap.II).

Ayant pris connaissance des particularités du modèle M4, nous abordons alors la deuxième partie de ce travail, dans l'objectif de répondre à la question relative aux performances du modèle M4 en dynamique: le modèle est-il capable de fournir de manière simple, rapide et précise des informations relatives à l'étude du délaminage des structures multicouches soumises à l'impact de charges dynamiques? Nous commençons alors par situer notre étude dans son contexte général (chap.III: bibliographie). Nous dressons ensuite les bases théoriques du développement en dynamique du code de calcul par éléments finis (chap.IV). Le code obtenu est validé sur un problème de plaque isotrope impactée (chap.V). A partir de ce même problème, nous mettons ensuite en valeur la rapidité de calcul, l'efficacité et la fiabilité du modèle éléments finis développé (chap.VI). Le dernier chapitre met enfin en valeur, à partir de l'étude d'un exemple de problème d'impact sur plaque multicouche, la capacité du modèle M4 à fournir de manière rapide et fiable les informations relatives au délaminage (chap.VII).

PARTIE A

PRESENTATION DE LA MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES

I. MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES

Les endommagements caractéristiques des matériaux multicouches sont principalement des délaminages ou des microfissurations transverses dans les plis les moins bien orientés par rapport au chargement. Ces phénomènes font intervenir essentiellement des efforts d'interface entre les couches et des surcontraintes au voisinage des bords (effets de bords) [*N.J.Pagano (1978)*].

Il est bien connu que les modèles basés sur les théories classiques de plaque (Love-Kirchoff, Reissner-Mindlin), s'avèrent incapables de prédire correctement ces efforts d'interface et ne fournissent pas des champs de contrainte en équilibre avec le chargement réel au voisinage des bords [*P.Destuynder (1980)*].

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul des efforts internes qui pilotent l'endommagement en vue de le modéliser. Des solutions analytiques ont été proposées pour des cas particuliers [*N.J.Pagano (1970)*]. Des modélisations numériques tridimensionnelles ont essayé de traiter des cas plus généraux [*R.L.Spilker & S.C.Chou (1980)*, *E.F.Ribicki (1971)*, *G.D.Renieri & C.T.Herakovich (1976)*]. Ces études par éléments finis 3D présentent l'inconvénient de nécessiter des maillages très fins et donc de demander des temps de calcul importants. Plusieurs auteurs ont alors proposé de nouvelles approches.

Une première famille d'approches consiste à faire des calculs de plaques (qui ne vérifient donc pas les conditions aux limites du problème 3D) et à déterminer au voisinage des bords des champs correcteurs pour corriger l'erreur d'équilibre au bord [*O.Allix (1989)*, *H.Dumontet (1990)*, *Lecuyer (1991)*].

Une seconde famille consiste à développer des théories de plaques multicouches, où la géométrie reste bidimensionnelle, mais où le nombre de champs cinématiques est augmenté pour bien prendre en compte l'influence de chaque couche [*Puppo & Evensen (1970)*, *Garett & Bailey (1977)*, *Pagano (1978)*, *Pagano & col. (1983)*, *Macquire & col. (1992)*]. Un seul calcul de plaque est alors nécessaire pour déterminer les efforts d'interface.

Avec le même objectif que les auteurs ci-dessus, nous proposons de modéliser les plaques composites multicouches à l'aide du modèle "M4" (modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches) [*J.F.Caron (1993)*, *A. Ehrlacher et col. (1994b)*, *G.Foret (1995)*].

Dans cette modélisation, l'objet est défini par une surface de \mathbb{R}^3 où chaque point (appelé point de matière) contient n particules de matériau (n = nombre de couches). La cinématique est alors donnée par n champs de vitesse sur la surface et les mouvements rigidifiants sont choisis de manière à "redonner" l'épaisseur et l'ordre d'empilement des couches. L'application de la méthode des puissances

virtuelles fait ensuite apparaître naturellement des efforts d'interface, qu'il s'agira d'identifier.

Le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) apparaît comme une généralisation du modèle de traction uniaxiale "Shear Lag Analysis" [K.Garett & J.E.Bailey (1977)] aux problèmes de contraintes multiaxiales et de flexion. Il peut aussi être considéré comme une simplification du modèle Global-local de Pagano & Rosi (1983). Il a été développée dans le but de faciliter l'étude d'endommagements tels que les délaminages et les micro-fissurations transverses.

Le comportement élastique linéaire du modèle M4 fait intervenir des raideurs de membrane de chacune des couches, ainsi que des raideurs d'interface associées aux discontinuités des champs de déplacement entre deux couches voisines.

Les tenseurs de raideur de membrane s'identifient facilement expérimentalement. Pour les tenseurs de raideurs d'interface cela semble impossible directement. On procède alors à une sorte de "changement d'échelle" en comparant les énergies élastiques d'une modélisation 3D de l'objet, à celle donnée par la modélisation M4 multiparticulaire. Les raideurs d'interface sont alors choisies de sorte que la densité "surfactive" d'énergie soit égale dans les deux modèles.

La construction du modèle M4 par la méthode des puissances virtuelles comporte trois niveaux:

- Niveau 1 : Définition de la géométrie et de la cinématique;
- Niveau 2 : Définition des efforts;
- Niveau 3 : Définition du comportement.

A chaque niveau, des choix de modélisation sont à faire. La pertinence finale du modèle sera fonction de la pertinence de ces divers choix.

I.1. CONSTRUCTION DU MODÈLE MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES (M4)

I.1.1. Premier niveau de construction: Définition de la géométrie et de la cinématique

a) Famille géométrique de l'objet

On peut décrire généralement l'objet à modéliser par une variété géométrique de dimension 3, 2 ou 1 de \mathbb{R}^3 . Plus la dimension de la variété est élevée plus la description de l'objet est fine.

Pour le M4, on choisit de décrire les objets par des surfaces de \mathbb{R}^3 ; la géométrie des objets est alors bidimensionnelle.

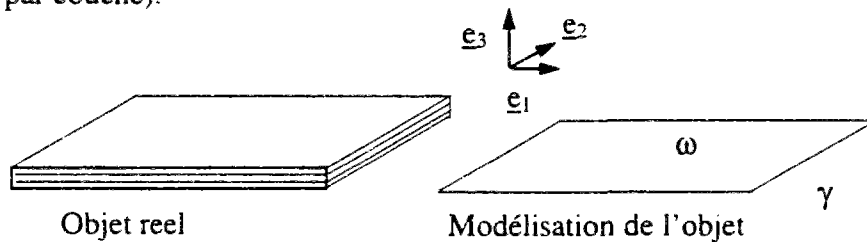
Pour simplifier l'exposé, nous supposons la surface plane dans sa configuration de référence. Nous choisissons un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ tel que la surface soit décrite par un domaine ω du plan $X_3=0$ de bord γ .

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations \tilde{X} pour un vecteur de ω , $\tilde{\underline{X}}$ pour un tenseur d'ordre 2 de ω , \underline{X} pour un vecteur de \mathbb{R}^3 et $\underline{\underline{X}}$ pour un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^3 .

b) Nombre de particules de matériau

Il est souvent possible de considérer qu'un point de matière n'est occupé que par une seule particule de matériau. Cependant, pour certains objets, on obtient des modèles plus pertinents en considérant que chaque point de matière est occupé par plusieurs particules de matériaux pouvant avoir des mouvements différents (c'est par exemple le cas en mécanique des sols où chaque point de matière est occupé par une particule solide et une particule liquide).

Le modèle M4 fait partie de ces modèles multiparticulaires; en chaque point de matière (X_1, X_2) de ω on suppose l'existence de n particules de matériaux (une particule par couche).



c) La microstructure des particules de matériau

Dans certaines applications, on peut enrichir la cinématique de la particule en lui associant une microstructure (l'exemple le plus connu est celui de la théorie des poutres, où chaque particule possède une microstructure associée à la section de la poutre).

Pour le modèle M4, on suppose que les particules de matériaux n'ont pas de microstructure.

d) Les liaisons internes

D'un point de vue pratique, après le choix de la microstructure, la cinématique de l'objet à l'instant t est définie par un espace vectoriel. Les liaisons internes conduisent à définir un sous espace vectoriel de cet espace.

Pour le modèle M4, on choisit de ne pas avoir de liaisons internes.

Nous disposons alors pour décrire les mouvements de l'objet à l'instant t , d'un espace vectoriel contenant l'ensemble des champs de vitesses généralisées possibles pour le modèle de l'objet.

On adopte alors l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). La configuration actuelle peut alors être confondue avec les configurations de référence de chaque couche. Dans ce cas, le mouvement peut être décrit par les n champs tridimensionnels de déplacement des particules définis sur ces configurations.

I.1.2. Deuxième niveau de construction: Définition des efforts

C'est à ce niveau que la Méthode des Puissances Virtuelles intervient.

Rappelons en le schéma général:

- 1^{ère} étape : Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels;
- 2^{ème} étape : Choix des formes linéaires définissant les efforts;
- 3^{ème} étape : Application du Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.).

L'idée philosophique de base de la méthode est de dire que le concept d'effort est abstrait, et que l'on ne peut en avoir qu'une mesure indirecte par le biais d'une mesure de puissance.

Pour définir des efforts, la '*puissance virtuelle*' constitue un "instrument" permettant de faire "*travailler virtuellement*" ces efforts et de mesurer la puissance mise en jeu. La puissance est alors une forme linéaire des champs de vitesses.

Cet "instrument" pour la définition des efforts, est ainsi naturellement un espace vectoriel des champs de vitesses généralisées, appelées mouvements virtuels. La première étape de la Méthode des Puissances Virtuelles consiste donc à choisir cet Espace Vectoriel des Mouvements Virtuels. Ce dernier doit impérativement inclure celui des mouvements réels possibles

a) Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

Le choix naturellement associé aux objets ci-dessus est l'espace vectoriel des n -champs de vecteurs sur ω (un champ par couche).

L'espace vectoriel des mouvements virtuels peut donc s'écrire sous la forme :

$$\underline{V}^* = \left\{ \underline{V}'^* = \tilde{V}'^* + W'^* \underline{e}_3, i = 1, n \right\}$$

(* faisant référence aux grandeurs virtuelles)

Cet espace vectoriel des mouvements virtuels contient un sous espace qui joue un rôle très important dans la définition des efforts intérieurs dans le modèle: le sous espace vectoriel des mouvements rigidifiants.

Il s'agit de l'ensemble des mouvements ne déformant pas l'objet. Les efforts intérieurs ne "travaillent" pas dans un mouvement virtuel rigidifiant (dans le cas du milieu continu 3D "classique", ce sont par exemple les combinaisons de champs de vitesses de translation et de rotation).

Le choix ici de ce sous-espace vectoriel des mouvements virtuels rigidifiants est essentiel; c'est lui qui va redonner l'ordre d'empilement et l'épaisseur des couches, deux caractéristiques géométriques qui ont été "perdues" dans la description de l'objet.

Notons h_i^- , h_i^+ et \bar{h}_i respectivement la côte du bas, la côte du haut et la côte médiane de la $i^{ème}$ couche et $e_i = h_i^+ - h_i^-$ l'épaisseur de cette couche.

Les mouvements virtuels rigidifiants \underline{V}_R^* dans ce modèle sont choisis tels que:

$$\begin{aligned} \exists (\underline{V}_0^*, \underline{\Omega}^*) \text{ tq } \forall (X_1, X_2) \text{ et } \forall i \in [1, n] \\ \underline{V}_R^*(X_1, X_2) = \underline{V}_0^* + \underline{\Omega}^* \wedge (X_1 \cdot \underline{e}_1 + X_2 \cdot \underline{e}_2 + \bar{h}_i \cdot \underline{e}_3) \end{aligned}$$

\underline{V}_0^* vecteur translation de \mathbb{R}^3 et $\underline{\Omega}^*$ vecteur rotation de \mathbb{R}^3 .

L'écriture des mouvements rigidifiants faisant intervenir un terme $\underline{\Omega}^* \wedge \bar{h}_i \cdot \underline{e}_3$ ressort du libre choix du modélisateur. L'introduction du terme \bar{h}_i a pour but de redonner l'épaisseur et l'ordre d'empilement des couches. La pertinence de ce choix devra être jugée à la fin de la construction du modèle

b) Choix des formes linéaires définissant les efforts

Nous pouvons distinguer trois types d'efforts:

- Efforts d'inertie;
- Efforts extérieurs;
- Efforts intérieurs.

** Efforts d'inertie*

La forme définissant les efforts d'inertie (Puissance Virtuelle des quantités d'Accélération PVA) est linéaire en fonction des quantités d'accélération et s'écrit sous la forme d'une densité dans ω .

Nous définissons simplement la puissance de la quantité d'accélération par :

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \rho^i \cdot \underline{\gamma}^i(X_1, X_2) \cdot \underline{V}^{i*}(X_1, X_2) d\omega \quad (1.1)$$

où $\underline{\gamma}^i$ désigne l'accélération au niveau de la couche i .

* Efforts extérieurs

On définit classiquement la puissance virtuelle des efforts extérieurs comme la somme de l'intégrale d'une densité dans le domaine ω et de l'intégrale d'une densité sur son bord γ , chaque densité étant une expression linéaire de la vitesse virtuelle locale.

Ce choix nous conduit à:

$$\begin{aligned} PVE(\underline{V}^*) = & \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{F}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{T}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) \right) d\gamma \\ & + \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n F_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^n T_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

où \tilde{F}^i est le champ de forces extérieures surfaciques dans la couche i et \tilde{T}^i le champ de forces extérieures linéiques sur le bord de la couche i .

Pour un problème de mécanique, les efforts extérieurs sont des données.

* Efforts intérieurs

L'intérêt principal de la méthode des puissances virtuelles est de pouvoir définir avec beaucoup de liberté ces efforts intérieurs. Il faut toutefois assurer la cohérence du modèle. Cette cohérence impose que la forme linéaire des efforts intérieurs s'annule sur le sous-espace vectoriel des mouvements rigidifiants:

$$PVI(\underline{V}_R^*) = 0 \quad \forall \underline{V}_R^* \text{ mouvement virtuel rigidifiant} \quad (1.3)$$

En général, cette forme linéaire (Puissance Virtuelle des efforts Intérieurs PVI) est définie à l'aide d'une densité dans ω linéaire en fonction des vitesses généralisées et de leurs gradients successifs. En s'arrêtant au premier gradient des champs de vitesses généralisées, on dit que l'on construit une théorie au premier gradient.

Ce choix conduit ici à:

$$PVI(\underline{V}^*) = \int \sum_{i=1}^n \left(\underline{A}^i(x, y) \cdot \underline{V}^{i*}(x, y) + \underline{B}^i(x, y) \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}(x, y)) \right) d\omega$$

Ainsi, le déroulement du P.P.V. fait apparaître pour le modèle M4 des efforts intérieurs \underline{A}^i et \underline{B}^i , d'aux des champs de vitesses généralisées et de leurs gradients, dont le sens physique est pour l'instant abstrait. L'identification des efforts intérieurs du modèle sera faite ultérieurement.

En décomposant les différents champs en une partie plane et une partie normale, l'expression précédente de PVI se réécrit sous la forme:

$$\begin{aligned} PVI(\underline{V}^*) = & \int \sum_{i=1}^n \left(\tilde{A}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) + A_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega \\ & + \int \sum_{i=1}^n \left(-\tilde{N}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{\varepsilon}^{i*}(X_1, X_2) + \tilde{D}^i(X_1, X_2) \cdot g\tilde{rad}(W^{i*}(X_1, X_2)) \right) d\omega \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\text{où } \varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (V_{\alpha,\beta}^{i*} + V_{\beta,\alpha}^{i*}), \quad r(\tilde{V}^{i*}) = \frac{1}{2} (V_{2,1}^{i*} - V_{1,2}^{i*}).$$

B^i , \tilde{D}^i et \tilde{N}^i sont un scalaire, un vecteur et un tenseur de \mathbb{R}^2 issus de la décomposition du tenseur \underline{B}^i de \mathbb{R}^3 . Nous avons en effet:

$$\underline{B}^i \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^i \cdot (\underline{grad}(\underline{V}^{i*}) + {}^t \underline{grad}(\underline{V}^{i*})) + \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^i \cdot (\underline{grad}(\underline{V}^{i*}) - {}^t \underline{grad}(\underline{V}^{i*})).$$

En écrivant que $\underline{V}^{i*} = \tilde{V}^{i*} + W^{i*} \cdot \underline{e}_3$, nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \underline{B}^i \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}) &= B'_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon'_{\alpha\beta}(\tilde{V}^{i*}) + B'_{\alpha 3} \cdot W'_{,\alpha} + r(\tilde{V}^{i*}) \cdot (B'_{12} - B'_{21}) \\ &= N'_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon'_{\alpha\beta}(\tilde{V}^{i*}) + D'_{\alpha} \cdot W'_{,\alpha} + r(\tilde{V}^{i*}) \cdot B^i \end{aligned}$$

Cette expression de la puissance des efforts intérieurs doit s'annuler pour les mouvements rigidifiants (condition de cohérence (1.3)):

$$PVI(\underline{V}^*) = 0 \quad \forall \underline{V}^* \text{ mouvement virtuel rigidifiant.}$$

En choisissant des mouvements virtuels particuliers, on montre que les efforts intérieurs exhibés ci-haut vérifient les équations suivantes:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{A}^i = 0 \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n A_3^i = 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{A}^i \cdot [X_1 \underline{e}_2 - X_2 \underline{e}_1] + B^i) = 0 \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n (A_3^i \cdot [X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2] - \bar{h}_i \tilde{A}^i + \tilde{D}^i) = 0 \quad (1.8)$$

Ces efforts intérieurs sont pour l'instant un concept abstrait. Il s'agit maintenant de préciser ce concept.

Le modèle M4 est construit dans le but d'obtenir des efforts intérieurs à l'interface. Pour mettre en évidence de tels efforts d'interface, la démarche est simple; il suffit d'imaginer un champ de vitesse virtuelle qui les fasse travailler eux seulement.

Si on s'intéresse par exemple à l'interface $i, i+1$, il suffit alors de choisir un champ de vitesse virtuelle qui rigidifie séparément les blocs 1 à i et $i+1$ à n .

Le choix par exemple d'un champ virtuel défini par:

$$\begin{cases} \underline{V}^{k*}(X_1, X_2) = \tilde{V}_0^* + W_0^* \underline{e}_3 + r(X_1 \underline{e}_1 - X_2 \underline{e}_2) + \tilde{\Gamma}^*(X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) \underline{e}_3 - \bar{h} \cdot \tilde{\Gamma}^* & k \in [1, i] \\ \underline{V}^{k*}(X_1, X_2) = 0 & k \in [i+1, n] \end{cases}$$

permet d'écrire la condition de cohérence (1.3) sous la forme:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} [\tilde{V}_0^* + W_0^*] \left[\sum_{k=1}^i (\tilde{A}^k + A_3^k \underline{e}_3) \right] d\omega + \\ & \int_{\omega} \left([\tilde{\Gamma}^* \wedge \underline{e}_3 + r^* \underline{e}_3] \cdot \left[\sum_{k=1}^i B^k \underline{e}_i - \tilde{A}^k \wedge (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) \right] - \right. \\ & \left. [\tilde{\Gamma}^* \wedge \underline{e}_3 + r^* \underline{e}_3] \cdot \left[\sum_{k=1}^i \underline{e}_i \wedge (-\bar{h}_k \tilde{A}^k + \tilde{D}^k) + A_3^k \underline{e}_3 \wedge (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) \right] \right) d\omega = 0 \\ & \forall \quad \tilde{V}_0^*, W_0^*, r^*, \tilde{\Gamma}^* \end{aligned}$$

Seuls des efforts de l'interface $i, i+1$ travaillent dans ce mouvement virtuel. Ceci nous amène à définir:

$$\tilde{\tau}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^i \tilde{A}^k(X_1, X_2) \quad (1.9)$$

$$\underline{v}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^i A_3^k(X_1, X_2) \quad (1.10)$$

$$\tilde{\mu}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^i (\bar{h}_i^* - \bar{h}_k) \tilde{A}^k(X_1, X_2) + \tilde{D}^k(x, y) \quad (1.11)$$

$$\theta^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^i B^k(X_1, X_2) \quad (1.12)$$

avec les conventions:

$$[]^{0,1} = []^{n,n+1} = 0$$

Avec ces notations, nous avons à partir de la relation (1.9):

$$\tilde{A}^i = \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} \quad i \in [2, n-1]$$

$$\tilde{A}^1 = \tilde{\tau}^{1,2}$$

$$\tilde{A}^n \text{ est donné par la relation de cohérence (1.5) } \sum_{i=1}^n \tilde{A}^i = 0$$

$\tilde{\tau}^{i,i+1}$ est appelé champ d'effort de cisaillement à l'interface $i, i+1$

On peut procéder de même pour les autres relations (1.10, 1.11, 1.12). Les autres relations de cohérence (1.6, 1.7 et 1.8) s'écrivent alors:

$$\sum_{i=1}^n A_j^i = 0 \quad \text{pour les efforts } v^{i,i+1}$$

$$\sum_{i=1}^n (-\bar{h}_i \tilde{A}^i + \tilde{D}^i) = 0 \quad \text{pour les efforts } \tilde{\mu}^{i,i+1} \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^n B^i = 0 \quad \text{pour les efforts } \theta^{i,i+1} \quad (1.14)$$

On introduit alors les appellations suivantes:

appellation	effort
efforts de cisaillement à l'interface $i, i+1$	$\tilde{\tau}^{i,i+1}$
effort normal à l'interface $i, i+1$	$v^{i,i+1}$
moments de flexion à l'interface $i, i+1$	$\tilde{\mu}^{i,i+1}$
couple de torsion à l'interface $i, i+1$	$\theta^{i,i+1}$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs se réécrit alors sous la forme:

$$PVI(\underline{V}^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left((\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \tilde{V}^{i*} + (v^{i+1,i} - v^{i-1,i}) W^{i*}(X_1, X_2) \right. \\ \left. + (\theta^{i+1,i} - \theta^{i-1,i}) r(\tilde{V}^{i*}) \right) d\omega \\ + \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left(-\tilde{N}^i: \tilde{\varepsilon}^{i*} + \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot g \tilde{r} ad(W^{i*}) \right) d\omega \quad (1.15)$$

Les taux de déformation généralisés du modèle sont les opposés des cofacteurs des efforts intérieurs dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs.

On introduit les appellations suivantes:

appellation	déformation
déformations membranaires de la couche i	$\tilde{\varepsilon}^i$ (1.16)
discontinuité de cisaillement à l'interface i,i+1	$\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} g\tilde{r}ad.U_3^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} g\tilde{r}ad.U_3^i$ (1.17)
discontinuité normale à l'interface i,i+1	$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i$ (1.18)
discontinuité de rotation dans le plan	$\omega_3^{i,i+1} = r(\tilde{U}^{i+1}) - r(\tilde{U}^i)$ (1.19)
discontinuité de rotation orthogonale au plan	$\tilde{\omega}^{i,i+1} = g\tilde{r}ad.U_3^{i+1} - g\tilde{r}ad.U_3^i$ (1.20)

c) Application du Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.)

Le Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.) postule que pour tout ω :

$$\forall \underline{V}^*, (PVE + PVI - PVA)(\underline{V}^*) = 0 \quad (1.21)$$

Il est équivalent aux équations fondamentales de la dynamique: $\underline{f} = m.\underline{\gamma}$. On l'exploite ici de manière à en tirer les équations aux dérivées partielles de l'équilibre local.

Son application conduit alors, après les habituelles intégrations par parties, aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites suivantes:

● Equations de mouvement:

$$\begin{cases} \text{div} \tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{I}{2} rot((\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \underline{e}_i) + \tilde{F}^i = \rho^i \tilde{\gamma}^i \\ -\text{div} \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_i = \rho^i \gamma_i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n] \quad (1.22)$$

● Conditions aux limites:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{N}}^i . \tilde{n} - \frac{I}{2} (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \tilde{n} \wedge \underline{e}_i = \tilde{T}^i \\ \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) . \tilde{n} = T_i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n] \quad (1.23)$$

I.1.3. Troisième niveau de construction: Le comportement

Le troisième niveau vise à mettre en relation les déformations généralisées et les efforts intérieurs, ce qui revient à définir les comportements de matériau dans le modèle.

Au point où nous sommes, de nombreux champs ont été définis dans ω . Ils n'ont pas tous le même statut du point de vue du problème mécanique. On en trouve de trois natures:

- des inconnues principales qui sont les champs de déplacement;
- des données dont les efforts surfaciques et linéiques extérieurs;
- des inconnues auxiliaires ou grandeurs constitutives parmi lesquelles figurent les efforts intérieurs.

Les relations constitutives expriment les efforts intérieurs en fonction des inconnues principales. Ce sont ces relations constitutives qui caractérisent les matériaux dont est constitué l'objet que l'on modélise. Elles définissent le comportement. En les définissant on ferme le problème: il y a autant d'équations que d'inconnues.

Dans la suite, on suppose que le comportement est linéaire, c'est à dire que les efforts internes sont reliés linéairement aux déformations associées.

Nous avons alors en chaque point (X_1, X_2) de ω $[3n + 6(n-1)]$ composantes d'efforts intérieurs et autant de déformations généralisées. Le comportement linéaire général du multicouche multiparticulaire ferait donc intervenir une "matrice" $9n-6 * 9n-6$.

De nombreux couplages existent: couplages entre les énergies correspondant aux déformations membranaires des différentes couches, couplages entre les énergies correspondant aux discontinuités dans les interfaces, couplages entre les énergies 'membranaires' et 'd'interface'...[A.Ehrlacher & col.(1994a)].

Tout cela fait que la matrice $9n-6*9n-6$ de comportement est pleine et le modèle est peu opératoire. Des hypothèses de découplage d'énergies doivent donc être émises pour rendre le modèle plus opératoire. Différents choix sont alors possibles. On présente ci-dessous un choix avec deux hypothèses simplificatrices qui semblent à première vue réalistes.

** Première hypothèse simplificatrice*

On suppose que les énergies élastiques liées aux déformations membranaires de chaque couche sont découplées entre elles, et découplées des énergies liées aux déformations aux interfaces.

Cela conduit à l'existence pour chaque couche d'un tenseur de raideur membranaire d'ordre 4 de \mathbb{R}^2 noté $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i$ tel que:

$$\tilde{\tilde{N}}^i = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i \cdot \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i \quad (1.24)$$

* *Deuxième hypothèse simplificatrice*

On suppose que les énergies liées aux déformations (discontinuités) de chaque interface sont découplées. On suppose de plus que les énergies liées aux "discontinuités normales" $D_3^{i,i+1}$, aux "discontinuités tangentielles" $\tilde{D}^{i,i+1}$ aux "discontinuités de rotation dans le plan" $\omega_3^{i,i+1}$ et aux "discontinuités de rotation orthogonales au plan" $\tilde{\omega}^{i,i+1}$ sont découplées entre elles.

Cela conduit à l'existence pour chaque interface $i,i+1$ d'un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^2 $\tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}$, d'une constante $K_v^{i,i+1}$, d'une constante $K_\theta^{i,i+1}$ et d'un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^2 $\tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1}$ tels que:

$$\tilde{\tau}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} \quad (1.25)$$

$$v^{i,i+1} = K_v^{i,i+1} \cdot D_3^{i,i+1} \quad (1.26)$$

$$\theta^{i,i+1} = K_\theta^{i,i+1} \cdot \omega_3^{i,i+1} \quad (1.27)$$

$$\tilde{\mu}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} \quad (1.28)$$

Le modèle M4 découlant de ces hypothèses s'appelle modèle M4 découplé.

L'identification expérimentale directe de ces "raideurs d'interface" est très difficile. Nous proposons dans le paragraphe suivant un raisonnement s'appuyant sur un "changement d'échelle" consistant à comparer une modélisation 3D classique du multicouche et une version simplifiée de la modélisation M4.

D'autres possibilités de découplage ont été envisagées. Chaque choix peut donner lieu à une version du modèle M4. La pertinence du choix se mesurera à la simplicité, à la prédictibilité et à l'aspect opératoire du modèle obtenu.

Parmi ces choix possibles, on peut citer celui conduisant au modèle dit M4 $2n+1$ [T.Naciri & col. (1996)]. Dans cette version, on conserve un certain couplage entre les énergies de discontinuités des différentes interfaces. Nous reviendrons sur cette version du modèle dans le paragraphe I.2.2., lors de l'identification des raideurs d'interface.

Mais auparavant, il est utile de récapituler ci-dessous les équations du modèle M4 découplé:

1.1.4. Equations du modèle M4 découplé

- *Equations de mouvement* (1.22):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2} \operatorname{rot}((\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \underline{e}_3) + \tilde{F}^i = \rho^i \tilde{\gamma}^i \\ -\operatorname{div} \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_3^i = \rho^i \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n]$$

- *Conditions aux limites* (1.23):

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{N}}^i \cdot \tilde{n} - \frac{1}{2} (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \tilde{n} \wedge \underline{e}_3 = \tilde{T}^i \\ \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \tilde{n} = T_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n]$$

appellation	effort
efforts de cisaillement à l'interface i,i+1	$\tilde{\tau}^{i,i+1}$
effort normal à l'interface i,i+1	$v^{i,i+1}$
moments de flexion à l'interface i,i+1	$\tilde{\mu}^{i,i+1}$
couple de torsion à l'interface i,i+1	$\theta^{i,i+1}$

appellation	déformation
déformations membranaires de la couche i	$\tilde{\tilde{\epsilon}}^i \quad (1.16)$
discontinuité de cisaillement à l'interface i,i+1	$\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} g \tilde{r} ad. U_3^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} g \tilde{r} ad. U_3^i \quad (1.17)$
discontinuité normale à l'interface i,i+1	$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i \quad (1.18)$
discontinuité de rotation dans le plan	$\omega_\gamma^{i,i+1} = r(\tilde{U}^{i+1}) - r(\tilde{U}^i) \quad (1.19)$
discontinuité de rotation orthogonale au plan	$\tilde{\omega}^{i,i+1} = g \tilde{r} ad. U_3^{i+1} - g \tilde{r} ad. U_3^i \quad (1.20)$

- *Comportement*

$\tilde{\tilde{N}}^i = \tilde{\tilde{K}}^i \cdot \tilde{\tilde{\epsilon}}^i \quad (1.24)$	$\tilde{\tau}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} \quad (1.25)$
$v^{i,i+1} = K_v^{i,i+1} \cdot D_3^{i,i+1} \quad (1.26)$	$\theta^{i,i+1} = K_\theta^{i,i+1} \cdot \omega_\gamma^{i,i+1} \quad (1.27)$
$\tilde{\mu}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} \quad (1.28)$	

I.2. PRÉSENTATION DU MODÈLE M4 SIMPLIFIÉ (M4S)

Dans ce paragraphe, on part des équations précédentes du M4 découplé pour introduire des hypothèses simplificatrices dans le but de rendre le modèle plus simple et opératoire (§I.2.1). Grâce à un '*changement d'échelle*', nous essayerons alors d'identifier les rigidités d'interface intervenant dans les équations (§I.2.2).

I.2.1. Obtention du modèle M4s par simplification du modèle M4 découplé

Parmi les différentes simplifications possibles, on en choisit une qui conduit à une version du modèle simple et opératoire. Le modèle obtenu sera appelé modèle M4 simplifié (M4s).

On introduit tout d'abord une liaison cinématique qui consiste à relier tous les déplacements transverses entre eux. Cela revient à supposer que les différentes couches sont parfaitement liées entre elles dans le sens transversal 3, et qu'elles se déplacent identiquement dans ce sens.

$$\forall i \in [1, n] \quad U_3^i = U_3 \quad (1.29)$$

On fait ensuite l'hypothèse simplificatrice que le rotationnel des couples de torsion est nul pour toute interface:

$$\forall i \in [1, n] \quad \text{rot}(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) = 0 \quad (1.30)$$

Ce choix est normal, puisque les particules de matière n'ont pas de microstructure. Nous verrons plus loin la simplification qu'apporte cette hypothèse au niveau des équations.

Ces deux hypothèses permettent de réduire le nombre de champs cinématiques de $3n$ à $2n+1$. Les équations d'équilibre (1.22) sont elles aussi réduites à $2n+1$. Elles peuvent s'écrire en fonction uniquement des efforts membranaires et des efforts de cisaillement d'interface:

$$\begin{cases} \text{div} \tilde{N}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = \rho^i \cdot \tilde{\gamma}^i \\ \sum_{i=1}^n \left(-\text{div} \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + F_3^i \right) = \rho^i \cdot \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n] \quad (1.31)$$

Les conditions aux limites (1.23) deviennent:

$$\begin{cases} \tilde{N} \cdot \tilde{n} = \tilde{T}^i & \forall i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \tilde{n} - T_3^i = 0 & \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n] \end{cases} \quad (1.32)$$

Les deuxièmes équations de (1.29) et de (1.30) doivent être comprises au sens des distributions, les cisaillements d'interface pouvant être discontinus.

La discontinuité de cisaillement à l'interface devient:

$$\tilde{D}^{i,j+1} = \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \left(\frac{e^i}{2} + \frac{e^{i+1}}{2} \right) \cdot g \tilde{rad} \cdot U_3 \quad (1.33)$$

1.2.2. Identification des rigidités d'interface du M4s

Pour déterminer les relations de comportement du modèle M4 simplifié, on écrit les équations du modèle tridimensionnel classique. Pour simplifier l'illustration, on suppose l'absence de forces de volume et on se place dans un cadre quasi-statique.

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

On pose:

$$N'_{\alpha\beta} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dz \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad i \in [1, n] \quad (1.36)$$

$$\tau_{\alpha}^{i-1,i}(X_1, X_2) = \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, h_i^-) \quad (1.37)$$

$$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, h_i^+) \quad (1.38)$$

En intégrant les deux premières équations (1.34) de l'équilibre 3D ci-dessus on obtient:

$$\begin{aligned} N'_{11,1} + N'_{12,2} + \tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i} &= 0 \\ N'_{21,1} + N'_{22,2} + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i} &= 0 \quad i \in [1, n] \end{aligned}$$

On observe alors qu'en intégrant dans l'épaisseur de chaque couche ces deux premières équations d'équilibre 3D, on retrouve les deux premières équations quasi-statiques du M4s à condition d'admettre l'hypothèse simplificatrice $\forall i \in [1, n] \quad \text{rot}(\theta^{i,j+1} - \theta^{i-1,i}) = 0$.

Les efforts membranaires par couche pour le M4s sont donc supposés être égaux à l'intégration selon l'épaisseur de la couche des contraintes 3D dans le plan.

Les efforts de cisaillement d'interface $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ du M4s sont supposés être égaux aux efforts de cisaillement d'interface du modèle 3D à l'interface.

Ces résultats bien qu'attendus n'étaient pas forcément évidents. La dénomination des efforts intérieurs du M4 n'est justifiée que maintenant, à postériori.

En reprenant la relation de comportement (1.24): $\tilde{N}^i = \tilde{\tilde{K}}^i \cdot \tilde{\tilde{\epsilon}}^i$, le tenseur $\tilde{\tilde{K}}^i$ s'identifie au tenseur des raideurs membranaires classiques. On sait donc le déterminer à partir des caractéristiques du matériau constituant la couche.

Intéressons-nous maintenant à la troisième équation (1.35) d'équilibre 3D. Pour pouvoir retrouver la troisième équation quasi-statique du M4s on introduit des approximations des composantes du champ de contrainte 3D (que l'on notera $\sigma_{\alpha\beta}^{up}$) en fonction de l'information moyenne disponible au niveau du M4s.

Comme $N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dz$, nous posons :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{up} = \frac{1}{e_i} N_{\alpha\beta}^i \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (1.39)$$

L'intégration dans toute l'épaisseur du multicouche de la troisième équation d'équilibre (1.35) pour $\tilde{\tilde{\sigma}}^{up}$ nous redonne alors la troisième équation d'équilibre du M4s.

On approxime ainsi les composantes membranaires du champ 3D par un champ constant par morceaux.

Pour les composantes $\sigma_{\alpha i}$, on dispose des informations (1.36-1.38) au niveau des interfaces. On approxime alors $\sigma_{\alpha i}$ par un champ affine par morceaux:

$$\sigma_{\alpha i}^{up}(z) = \tau_{\alpha}^{i-1,i} + \frac{z - h_i^-}{h_i^+ - h_i^-} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \quad (1.40)$$

Le modèle M4s ne faisant pas apparaître de contrainte normale au plan, nous supposons que l'apport énergétique de σ_{33} est négligeable.

Ecrivons maintenant l'énergie élastique associée au champ de contrainte 3D réel:

$$W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\int_{\omega} \frac{1}{2} \sigma_{kl} S'_{lkr} \sigma_{sr} d\omega \right] dz \quad k, l, r, s = 1, 2, 3$$

où S'_{ikrs} sont les composantes du tenseur de souplesse de la $i^{\text{ème}}$ couche [J.M.Berthelot (1992)].

En supposant que l'axe 3 est un axe d'orthotropie, cette expression s'écrit [J.M.Berthelot (1992)]:

$$W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left[\int_{\omega} (\sigma_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\delta\gamma} + 2\sigma_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} + \sigma_{33} S'_{3333} \sigma_{33} + \sigma_{3\alpha} S'_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{3\beta}) d\omega \right] dz \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

En y injectant les champs de contrainte approchés (1.39) et (1.40), on obtient une approximation de l'énergie élastique associée au champ de contrainte du modèle M4s:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\delta\gamma} + \frac{2e_i}{3} S'_{\alpha 3\beta 3} \left[2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (1.41)$$

Toujours dans le sens d'obtenir un modèle découplé, la dernière simplification du modèle consiste à supposer que les interfaces sont découplées. En écrivant que:

$$\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i-1,i} \approx \tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Nous obtenons le découplage désiré:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\delta\gamma} + 2e_i S'_{\alpha 3\beta 3} \left[2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega \quad (1.42)$$

Cette expression définit une énergie élastique approchée du M4s. Par ailleurs, l'énergie élastique du M4s s'exprime en fonction des efforts par:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tau_{\alpha}^{i,i+1} D'_{\alpha}{}^{i,i+1} \right] d\omega \quad (1.43)$$

En identifiant les deux densités massiques d'énergie élastique données par les relations (1.42) et (1.43), la relation de comportement du modèle M4 simplifié s'écrit:

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{e_i} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\delta\gamma} \quad (1.44)$$

$$D'_{\alpha}{}^{i,i+1} = 2 \left[e_i S'_{\alpha 3\beta 3} + e_{i+1} S'_{\alpha 3\beta 3} \right] \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad (1.45)$$

La version $2n+1$ du modèle M4 que nous avons évoquée au paragraphe précédent adopte une autre présentation du modèle [T.Naciri & col. (1996)]. Les équations de mouvement obtenues sont celles du M4s, cependant le comportement est un peu différent. En arrivant à l'expression (1.41) ci-dessus, on ne fait plus d'hypothèse simplificatrice. Dans le comportement, on conserve alors un couplage entre deux interfaces successives $i-1, i$ et $i, i+1$.

Dans ce cas (modèle $2n+1$), la relation de comportement à l'interface s'exprime à partir de (1.41) par:

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = \frac{4}{3} [e_i S_{\alpha\beta\gamma}^i + e_{i+1} S_{\alpha\beta\gamma}^{i+1}] \cdot \tau_{\beta}^{i,i+1} + \frac{2}{3} e_{i+1} S_{\alpha\beta\gamma}^{i+1} \cdot \tau_{\beta}^{i+1,i+2} + \frac{2}{3} e_i S_{\alpha\beta\gamma}^i \cdot \tau_{\beta}^{i-1,i}$$

La différence essentielle entre le M4s et le M4 $2n+1$ réside donc dans la relation de comportement à l'interface.

Remarque:

Dans le cas d'un empilement [0/90/0] par exemple, nous obtenons avec les deux modèles une relation de comportement à chaque interface de la forme [A.Ehrlacher & col. (1994a), T.Naciri & col. (1996)]:

$$\tau_{\alpha}^{0/90} = K \cdot D_{\alpha}^{0/90}$$

La rigidité K d'interface est cependant différentes entre les deux modèles dans un rapport $\frac{K^{2n+1}}{K^{M4s}}$ égal à $3/2$.

Ainsi, plusieurs démarches sont actuellement envisagées pour déterminer le comportement à l'interface. La démarche conduisant au modèle dit $2n+1$ part des champs cinématiques 3D [T.Naciri & col. (1996)]. Une autre démarche consiste à approximer les contraintes 3D par la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner [A.Chabor (1996)]. Une troisième démarche enfin effectue le passage du modèle 3D au modèle M4 par un changement d'échelle [P.Carreira]. Nous retiendrons par exemple qu'entre les deux modèles M4s et $2n+1$, la rigidité à l'interface peut varier dans un rapport de 1 à 1.5. Mais, tout cela ne change rien quant à la philosophie, les équations et la pertinence du M4s.

Le M4 simplifié ainsi construit se prête bien à l'établissement de solutions analytiques dans le cadre de la statique.

Pour valider le modèle M4 simplifié, nous traiterons dans le chapitre II deux problèmes simples, se prêtant à des solutions analytiques.

La possibilité de solution analytique reste toutefois limitée à des cas simples de géométrie et de chargement. Pour pouvoir traiter avec le M4s des problèmes plus complexes, et pour pouvoir juger de la fiabilité de ce modèle, nous sommes amenés à construire un outil de calcul numérique.

Nous avons choisi de développer cet outil sur la base de la technique des éléments finis. Nous présentons dans le prochain paragraphe, les grandes lignes et quelques spécificités de ce développement.

Mais auparavant, il est utile de rappeler les équations du M4s:

I.2.3. Equations du M4s

* *Equations de mouvement* (1.31):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{\mathbf{F}}^i = \rho^i \cdot \tilde{\gamma}^i \\ \sum_{i=1}^n \left(-\operatorname{div} \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + \mathbf{F}_3^i \right) = \rho^i \cdot \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n]$$

* *Condition aux limites* (1.32)

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{T}}^i \quad \forall i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{T}_3^i \right) = 0 \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n]$$

* *Comportement*

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e_i} S_{\beta\alpha\delta\gamma}^i N_{\gamma\delta}^i \quad (1.44)$$

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = 2 \left[e_i S_{\alpha\beta\beta\gamma}^i + e_{i+1} S_{\alpha\beta\beta\gamma}^{i+1} \right] \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad (1.45)$$

I.3. FORMULATION EN DYNAMIQUE DU M4 DECOUPLÉ PAR ÉLÉMENTS FINIS

Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu les équations de mouvement (1.22, 1.23) du modèle M4 découplé et celles plus opératoires (1.31, 1.32) du modèle M4s. On ne dispose de solutions analytiques M4s que pour quelques problèmes simples de statique [M.H.Philippe (1996)]. On ne dispose pas de solution analytique pour des problèmes d'impact.

Pour évaluer les performances du modèle M4s, à la fois en statique et en dynamique, nous devons donc le développer numériquement. Nous avons choisi de procéder à ce développement à l'aide de la méthode des éléments finis.

Grâce au principe de Hamilton et à la technique des éléments finis, les équations du M4 découplé seront formulées en dynamique à l'aide d'une seule équation matricielle, dite équation éléments finis (§I.3.2).

Nous introduirons ensuite l'hypothèse simplificatrice (1.29). Cette hypothèse se traduit au niveau de la formulation éléments finis par une liaison cinématique. Grâce à cette liaison cinématique nous nous placerons dans le cadre du modèle simplifié M4s (§I.4.3). L'outil numérique pourra donc être utilisé aussi bien pour le M4 découplé que pour le M4 simplifié.

Nous présenterons enfin (§I.3.4) la technique adoptée pour la résolution par le M4s de problèmes statiques, avec prise en compte de la liaison cinématique et des conditions aux limites. Nous verrons plus tard (§IV.4), que c'est cette même technique qui sera à la base de la résolution de problèmes de dynamique.

La présentation de la méthode des éléments finis sera faite en annexe. Nous y parlerons aussi de quelques particularités que présente l'application de la technique des éléments finis dans le cas du M4, notamment au niveau du calcul des matrices de rigidité d'interface.

I.3.1. Formulation variationnelle du M4 découplé

Dans ce paragraphe, nous écrivons une formulation variationnelle des équations dynamiques du M4 découplé. Grâce à la technique des éléments finis, nous formulons ensuite le problème à l'aide d'une seule équation matricielle dite équation éléments finis.

Nous partons du principe de Hamilton qui stipule que [*H.L.Langhaar (1962) cité par B.R.Petersen (1985)*]:

Parmi les mouvements qui peuvent faire évoluer un système conservatif d'une configuration initiale X_1 à une configuration finale X_2 prescrites, pendant un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$, le mouvement qui aura effectivement lieu est celui qui rend stationnaire la valeur de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta W_d - \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (1.46)$$

E_c désignant l'énergie cinétique, W_d l'énergie de déformation et W_{ext} le travail des efforts extérieurs. Le symbole δ faisant référence à la première variation [*G.Dhatt & G.Touzot (1984)*].

Nous remarquerons que le cas statique correspond à un problème stationnaire où $E_c=0$, et nous retrouvons alors le principe de minimisation de l'énergie potentielle:

$$\delta(W_d - W_{ext}) = 0$$

Exprimons les différents termes de l'expression (1.46) en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés.

Pour le M4 découplé, l'énergie de déformation s'écrit:

$$W_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[\tilde{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^i : \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i : \tilde{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^i + \tilde{D}^{i,i+1} \cdot \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} + D^{i,i+1}_3 \cdot K_v^{i,i+1} \cdot D^{i,i+1}_3 + \right. \\ \left. \tilde{\omega}^{i,i+1} \cdot \tilde{\tilde{K}}_{\mu}^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} + \omega_3^{i,i+1} \cdot K_{\theta}^{i,i+1} \cdot \omega_3^{i,i+1} \right] d\omega \quad (1.47)$$

Dans cette expression, les déformations membranaires ainsi que les différents termes de discontinuité aux interfaces peuvent être exprimés en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés.

L'énergie extérieure W_{ext} se compose d'une énergie W_s correspondant aux efforts surfaciques et d'une énergie W_c correspondant aux efforts linéiques:

$$W_s = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tilde{F}^i \cdot \tilde{u}^i + F_3^i \cdot u_3^i] d\omega \quad (1.48)$$

$$W_c = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma} [\tilde{T}^i \cdot \tilde{u}^i + T_3^i \cdot u_3^i] d\gamma \quad (1.49)$$

Enfin, l'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial \underline{u}^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{u}^i}{\partial t} d\omega \quad (1.50)$$

La relation (1.50) nécessite l'expression de $\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt$ en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés. Nous écrivons alors:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial \underline{u}^i}{\partial t} \cdot \delta \left(\frac{\partial \underline{u}^i}{\partial t} \right) d\omega dt$$

Une intégration par parties conduit à:

$$2\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial \underline{u}^i}{\partial t} \cdot \delta \underline{u}^i \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho^i \frac{\partial^2 \underline{u}^i}{\partial t^2} \cdot \delta \underline{u}^i dt d\omega$$

Les hypothèses du principe de Hamilton supposent que la configuration initiale et finale sont prescrites, ce qui assure que $\delta \underline{u}^i(t_1) = 0$. Nous choisissons $\delta \underline{u}^i$ de sorte que $\delta \underline{u}^i(t_2) = 0$.

$$\text{D'où: } 2\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho^i \frac{\partial^2 \underline{u}^i}{\partial t^2} \cdot \delta \underline{u}^i dt d\omega \quad (1.51)$$

Grâce aux expressions (1.47-1.49) et (1.51), nous pouvons exprimer la relation (1.46) en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivées. A partir de là, et utilisant la technique des éléments finis dont nous avons rappelé les principes en annexe I.b, nous allons pouvoir obtenir une équation éléments finis matricielle traduisant les équations du M4 en dynamique.

I.3.2. Équation éléments finis du M4 découplé en dynamique: $M\ddot{U}+KU=F$

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre la formulation variationnelle (1.46) du problème obtenue au paragraphe précédent. En appliquant la méthode d'approximation par éléments finis (exposée en annexe I.b), nous traduisons les équations du modèle M4 découplé à l'aide d'une seule équation matricielle, appelée équation éléments finis.

Nous commençons par décomposer le domaine géométrique ω en éléments ou mailles ω^e . Au niveau de chaque élément, le déplacement \underline{u}^e est fonction des déplacements nodaux \underline{u}_i via les fonctions de forme (voir annexe I.a).

Le choix du degré d'interpolation des fonctions de forme dépend essentiellement de l'ordre de dérivation des fonctions de forme dans le calcul des déformations [M.Smaoui (1993)]. L'expression de ces déformations fait apparaître des dérivées premières de fonction de forme. Le calcul précis de ces déformations nécessite alors de choisir une interpolation quadratique, c'est à dire des fonctions de forme de degré deux. L'élément que nous obtenons alors est dit quadratique [G.Dhatt & G.Touzot (1984)].

Pour des considérations d'erreur d'approximation [cf. G.Dhatt & G.Touzot (1984)], nous choisissons d'avoir 8 noeuds par élément. L'élément obtenu est dit quadratique incomplet.

Chaque noeud possède $3n$ composantes de déplacement, soit 3 composantes par couche. Nous noterons U_{jk}^i les termes de déplacement nodaux, où l'indice i désigne la couche, j le numéro du noeud et k la composante 1, 2 ou 3 respectivement suivant \underline{e}_1 , \underline{e}_2 ou \underline{e}_3 .

Nous choisissons d'arranger les termes de déplacement nodaux par noeud, puis par couche et enfin par composante. Ceci permet de définir un vecteur déplacements nodaux $U^e = [U_{11}^1 \ U_{12}^1 \ U_{13}^1 \ U_{11}^2 \ \dots U_{p3}^3]$, où p désigne le nombre de noeuds par élément ($p=8$). Nous verrons plus tard (§1.3.4.), que ce choix d'arrangement est le plus économique en temps de calcul.

En désignant par $U(X_1, X_2, t)$ le vecteur déplacement à $3n$ composantes au point (X_1, X_2) à l'instant t , nous pouvons écrire, avec des notations évidentes, l'interpolation quadratique du déplacement:

$$U_k^i(X_1, X_2, t) = \sum_{s=1}^8 N_s(X_1, X_2) \cdot U_{sk}^i(t) \quad (1.52)$$

A partir de là, en utilisant les relations de comportement (1.24-1.28) du M4 découplé et les techniques classiques de décomposition matricielle, nous pouvons exprimer les différents termes intervenant dans la formulation variationnelle (1.46):

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}^i(t) : \bar{\varepsilon}^i(t) = {}^t U^e(t) ({}^t Q \cdot K \cdot Q) U^e(t) \quad (1.53)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{D}^{i,i+1}(t) \cdot \bar{\tau}^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t T \cdot K_r \cdot T) U^e(t) \quad (1.54)$$

$$\sum_{i=1}^n v^{i,i+1}(t) \cdot D_3^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t O \cdot K_v \cdot O) U^e(t) \quad (1.55)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mu}^{i,i+1}(t) \cdot \bar{\omega}^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t \mathcal{F} \cdot K_\mu \cdot \mathcal{F}) U^e(t) \quad (1.56)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta^{i,i+1}(t) \cdot \omega_3^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t \Delta \cdot K_\theta \cdot \Delta) U^e(t) \quad (1.57)$$

$$\sum_{i=1}^n \rho^i \underline{\gamma}^i \delta \underline{u}^i = {}^t \ddot{U}^e \cdot \Theta^e \cdot \delta U^e \quad (1.58)$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}^i \cdot \delta \underline{u}^i = ({}^t \Pi \cdot F) \delta U^e \quad (1.59)$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{T}^i \cdot \delta \underline{u}^i = ({}^t \Pi \cdot T) \delta U^e \quad (1.60)$$

Les matrices ' K ' font intervenir des termes de raideur et la matrice Θ^e des termes de masse. Les différentes matrices intervenant dans ces expressions sont explicitées en annexe I.a. Nous présenterons en annexe I.c un exemple de calcul pour la matrice T .

Définissons les matrices élémentaires:

$$K^e = \int_{\omega^e} [{}^t Q \cdot K \cdot Q + {}^t T \cdot K_r \cdot T + {}^t O \cdot K_v \cdot O + {}^t \mathcal{F} \cdot K_\mu \cdot \mathcal{F} + {}^t \Delta \cdot K_\theta \cdot \Delta] d\omega \quad (1.61)$$

$$M^e = \int_{\omega^e} \Theta^e d\omega \quad (1.62)$$

$$F^e = \int_{\omega^e} {}^t \Pi \cdot F d\omega \quad (1.63)$$

En intégrant les expressions précédentes dans la formulation variationnelle (1.46) exprimée en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés, nous obtenons la relation

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\omega^e} \delta U^e \cdot (K^e U^e + M^e \ddot{U}^e - F^e) dt = 0 \quad (1.64)$$

Pour obtenir les matrices globales de rigidité K et de masse M , il suffit alors d'assembler les différentes matrices élémentaires K^e et M^e , par l'une des techniques classiques d'assemblage [voir *G.Dhatt & G.Touzot (1984)*]. Nous assemblons également les vecteurs élémentaires U^e et F^e de façon à former les vecteurs déplacement global U et force extérieure global F [*G.Dhatt & G.Touzot (1984)*]. Nous obtenons alors:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U \cdot (K \cdot U + M \cdot \ddot{U} - F) dt = 0 \quad (1.65)$$

δU désignant une variation de déplacement arbitraire, cette équation ne peut être vérifiée dans le cas général, que si $K \cdot U + M \cdot \ddot{U} - F = 0$. Nous obtenons ainsi l'équation globale du problème en dynamique, dite équation éléments finis:

$$\boxed{M \cdot \ddot{U} + K \cdot U = F} \quad (1.66)$$

Cette forme d'équation est classique; nous pouvons la retrouver avec les modèles classiques 2D ou 3D. Toutefois, les particularités du modèle M4 (cinématique particulière et présence d'interfaces) font que les matrices K et M présentent des structures et des expressions quelque peu différentes des structures classiques. Pour cela, nous présentons en annexe I.c quelques détails sur le calcul de la matrice de rigidité K . Nous reparlerons de la matrice masse plus tard (§.IV.3.), lorsque nous parlerons des différentes structures opératoires pour cette matrice.

1.3.3. Prise en compte au niveau des éléments finis de la simplification du modèle découplé: le modèle simplifié M4s

Dans ce paragraphe, nous allons traduire le passage du modèle découplé au modèle simplifié, par des opérations sur les lignes et les colonnes des matrices élémentaires K^e , M^e et F^e .

Les hypothèses (1.29, 1.30) du M4s se traduisent par des énergies de flexion d'interface nulles et des composantes 3 identiques pour les différentes couches $U_1^i = U_3^i$.

Cette dernière expression introduit des liaisons cinématiques au niveau des déplacements nodaux inconnus:

pour tout noeud p , et pour toute couche $i > 1$, nous avons en effet:

$$U_{pi}^3 = U_{p1}^3 \quad \Rightarrow \quad U_{pi}^3 - U_{p1}^3 = U_{pi}^{3'} = 0 \quad (1.67)$$

Traisons d'abord le cas d'une seule relation de ce type $U_{pi}^3 - U_{p1}^3 = U_{pi}^{3'}$.

Une nouvelle variable $U_{pi}^{3'}$ s'introduit à la place de l'ancienne U_{pi}^3 . Le vecteur déplacement $U^{e'}$ des nouvelles variables s'exprime en fonction du vecteur déplacement U^e par $U^{e'} = R \cdot U^e$ où R a la forme suivante:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & 1 & & \\ & 1 & \dots & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Le terme unité en dehors de la diagonale correspond au croisement de la ligne $3 \cdot n \cdot (p-1) + 3 \cdot (i-1) + 3$ et de la colonne $3 \cdot n \cdot (p-1) + 3$.

L'énergie de déformation élémentaire $W_d^e = {}^t U^e \cdot K^e \cdot U^e$ s'écrit en fonction du nouveau vecteur déplacement élémentaire: $W_d^{e'} = {}^t U^{e'} ({}^t R \cdot K^e \cdot R) \cdot U^{e'}$.

$K^{e'} = {}^t R \cdot K^e \cdot R$ apparaît alors comme la nouvelle matrice de rigidité élémentaire.

L'énergie cinétique élémentaire s'écrit $E_c^e = {}^t \dot{U}^e \cdot M^e \cdot \dot{U}^e = {}^t \dot{U}^{e'} ({}^t R \cdot M^e \cdot R) \cdot \dot{U}^{e'}$. La nouvelle matrice masse élémentaire est $M^{e'} = {}^t R \cdot M^e \cdot R$.

Le travail des forces extérieures $W_{ext}^e = {}^t U^e \cdot F^e$ s'écrit en fonction du nouveau vecteur déplacement élémentaire: $W_{ext}^{e'} = {}^t U^{e'} ({}^t R \cdot F^e)$ où $F^{e'} = {}^t R \cdot F^e$ apparaît comme le nouveau vecteur force élémentaire.

L'obtention de $K^{e'}$, $M^{e'}$ et $F^{e'}$ à partir de K^e , M^e et F^e se fait grâce à des opérations sur les lignes et les colonnes (multiplication par la matrice R)

C'est ainsi que nous pouvons obtenir les nouvelles matrices $K^{e'}$, $M^{e'}$ et $F^{e'}$ pour une des relations de type $U_{pi}^3 - U_{p1}^3 = U_{pi}^{3'}$.

En procédant de proche en proche, et en traitant ainsi les liaisons cinématiques une à une, nous pouvons calculer les nouvelles matrices élémentaires $K^{e'}$ et $M^{e'}$ et le nouveau vecteur force élémentaire $F^{e'}$ pour le modèle simplifié.

Il restera ensuite à traduire les conditions $U_{pi}^{3'} = 0$ sur les nouvelles variables, comme hypothèses de conditions aux limites, ce que nous verrons au paragraphe suivant.

L'utilisation des nouvelles matrices élémentaires K^e , M^e et F^e permet ainsi la conservation des énergies élémentaires, et donc la conservation des énergies globales intervenant dans la formulation variationnelle découlant du principe de Hamilton.

Nous noterons enfin qu'il est possible d'introduire les liaisons cinématiques directement au niveau des matrices globales, sans intervenir au niveau des matrices élémentaires. Mais cela serait plus complexe à mettre en œuvre à cause du fait que les matrices globales K et M ont une structure bande et sont stockées sous forme de vecteurs.

I.3.4. Prise en compte des conditions aux limites et technique de résolution en statique

Nous nous plaçons dans le cadre de la statique, d'abord parce que nous allons aborder dans le chapitre suivant une phase de validation en statique qui utilisera directement les résultats de ce paragraphe, et ensuite parce que, comme nous le verrons plus loin (§IV.2.), la résolution en dynamique se ramène à la résolution à chaque pas de temps d'un problème statique avec ces mêmes techniques.

Les conditions aux limites peuvent être exprimées sur les déplacements ou les contraintes.

Les conditions aux limites en contraintes sont introduites de manière simple sous forme d'efforts extérieurs.

Pour l'introduction des conditions aux limites en déplacement plusieurs méthodes existent [G.Dhatt & G.Touzot (1984)].

La *méthode du terme diagonal dominant*, simple à mettre en œuvre, n'est pas bien adaptée à notre matrice K . En effet, le rapport élevé qui peut exister entre les termes de rigidité membranaires et ceux relatifs à l'interface, peut engendrer une matrice K mal-conditionnée.

La *méthode du terme unité sur la diagonale* consiste, pour chaque liaison cinématique, à modifier le vecteur force global F et la matrice de rigidité globale K . Pour des système de grande taille, avec un grand nombre de relations cinématiques (cas du M4 simplifié par exemple), cette méthode devient coûteuse et complexe à programmer.

La méthode que nous adoptons est la *méthode de suppression des équations*. Elle consiste à supprimer les équations surabondantes. Nous supprimerons ainsi la

ligne et la colonne correspondant à chaque liaison cinématique de type M4 simplifié (1.67). Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues, et de le réduire considérablement dans le cas du modèle simplifié. Cela permet de diminuer la taille de la matrice à inverser, et par la même le temps de calcul.

Partant de l'équation globale $K.U=F$, l'introduction des conditions aux limites et des relations cinématiques permet de classer les composantes du vecteur déplacement global U , en composantes cherchées et, par opposition, composantes données (imposées nulles ou non nulles).

Pour simplifier la présentation, nous supposons que les premières composantes de U sont les composantes cherchées. Nous posons alors $U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}$ (l'indice c ici faisant référence aux composantes cherchées de U et l'indice d aux composantes données de U).

Nous pouvons alors décomposer le système $K.U=F$ à résoudre en:

$$\begin{pmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ F_d \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

(Pour le vecteur F , l'indice c fait référence aux composantes cherchées de U et l'indice d aux composantes données de U)

U_d étant donné, le but est de déterminer U_c . Il suffit pour cela de résoudre la première équation de ce système:

$$K_{cc}.U_c + K_{cd}.U_d = F_c$$

soit encore:

$$K_{cc}.U_c = F_c - K_{cd}.U_d. \quad (1.69)$$

K_{cc} et F_c sont obtenus à partir de K et F , par suppression de lignes et colonnes correspondant aux conditions aux limites (nulles en déplacement) et aux relations cinématiques.

Une fois les matrices K_{cc} et F_c extraites, la résolution consistera à inverser la matrice K_{cc} .

Plusieurs méthodes de résolution des systèmes linéaires sont alors possibles. Elles peuvent être classées en deux catégories [*G.Dhatt & G.Touzot (1984)*]:

- les *méthodes itératives*, conduisant à la solution après un certain nombre d'itérations, nombre qui dépend de la structure de la matrice K_{cc} à inverser;
- les *méthodes directes*, conduisant à la solution après un nombre défini d'opérations. Elles sont plus complexes à programmer, demandent plus d'espace

mémoire, et sont un peu plus sensibles aux erreurs d'arrondi. Elles sont cependant en général plus rapides que les méthodes itératives.

Pour notre cas, nous choisissons d'utiliser une méthode directe, dérivant de la méthode d'élimination de Gauss. Elle consiste d'abord en une décomposition de la matrice K_{cc} dite décomposition de Cholesky, suivie d'une résolution par montée-descente [G.Dhatt & G.Touzot (1984)]. Cette méthode est autorisée par le fait que la matrice extraite K_{cc} est symétrique, définie et positive. Elle présente une structure bande. Seule la partie utile (composantes non nulles) sera stockée.

Grâce à la méthode de Gauss, nous décomposons donc K_{cc} sous la forme de Cholesky $K_{cc}=L'^L$, où la matrice L est triangulaire inférieure.

Le système à résoudre s'écrit alors:

$$L'^L U_c = F_c$$

et se décompose en

$$\begin{cases} L V_c = F_c \\ L' L U_c = V_c \end{cases} \quad (1.70)$$

Le système $L V_c = F_c$ se résout facilement par montée, L étant triangulaire inférieure.

Une fois V_c déterminé, on peut résoudre $L' L U_c = V_c$ par descente, L' étant triangulaire inférieure.

Notons que cette opération d'inversion (ou encore de décomposition) est en général l'opération la plus coûteuse en temps de calcul, et qu'elle dépend essentiellement de la taille de la matrice K_{cc} à inverser (ordre et largeur de bande). Cela explique à posteriori notre choix de la manière de prise en compte des conditions aux limites en déplacement, ainsi que de l'arrangement des composantes du vecteur déplacement par noeud, couche puis composante. Ces choix réduisent au mieux la taille et la largeur de bande de la matrice à inverser, et diminuent par conséquent le temps de calcul.

II. VALIDATION DU MODELE M4 EN STATIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le modèle M4 découplé ainsi que sa version simplifiée M4s. Nous avons ensuite formulé par éléments finis les équations de ces deux modèles. Un code de calcul par éléments finis a été alors programmé dans le langage Fortran. La partie statique de ce code de calcul (appelée Maille M4) peut être utilisée de façon autonome pour calculer dans le cadre du modèle M4s des problèmes en statique.

Disposant de ce code de calcul (Maille M4), nous poursuivons à travers ce chapitre trois objectifs:

- ☞ manipuler les équations et nous familiariser avec les concepts du modèle M4s;
- ☞ valider en statique le code de calcul par éléments finis que nous développons;
- ☞ valider le modèle M4s sur des problèmes statiques.

La manipulation des équations du M4s se fera à travers la recherche de solutions analytiques pour quelques problèmes simples. Le premier est celui d'une poutre console bicouche en flexion. Le deuxième est celui d'une plaque $[0/90]_s$ en traction uniforme.

A partir de ces solutions analytiques, nous essayerons de valider la partie statique du code éléments finis que nous construisons. Cette validation se fera en comparant les solutions obtenues par éléments finis, aux solutions analytiques. La partie statique du code éléments finis que nous validons ici, constitue en elle-même un code éléments finis autonome.

La validation du modèle M4s se fera à travers l'analyse de la contrainte de cisaillement d'interface du M4s. Nous comparerons cette contrainte aux contraintes similaires données par des modèles analytiques ou éléments finis 3D. Deux exemples seront traités; celui d'une plaque en traction uniforme et celui d'une plaque trouée, également en traction uniforme.

Les calculs effectués dans ce chapitre constituent un premier test de fiabilité et de crédibilité du modèle. Nous allons voir que le modèle est fiable en statique. C'est au vu des résultats de cette partie que nous avons décidé la poursuite du développement numérique du modèle.

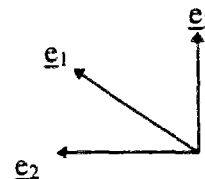
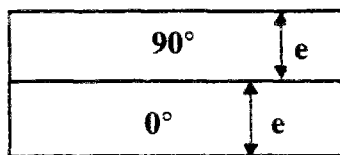
II.1. VALIDATION EN STATIQUE DE LA MAILLE M4: CAS D'UNE POUTRE CONSOLE [0/90] EN FLEXION

L'utilisation de poutres permet d'introduire des hypothèses simplificatrices. Il est possible dans ce cas d'obtenir des solutions analytiques. Des problèmes de poutre sous différents chargements et conditions aux limites ont pu ainsi être traités analytiquement à l'aide du M4s [T.Naciri & col. (1996), M.H.Philippe (1996)]. Il s'agit pour l'essentiel de poutres bicouches ou tricouches. Nous présentons ici l'exemple de la poutre console bicouche.

Nous commençons par rechercher la solution analytique du problème. Nous comparons ensuite la solution numérique du M4s donnée par notre code éléments finis à cette solution analytique.

II.1.1. Résolution analytique du problème à l'aide du M4s

Considérons une poutre constituée d'un bicouche [0/90], les deux couches étant formées du même matériau. Supposons sa largeur faible devant sa longueur (rapport 100).



Nous émettons les hypothèses suivantes:

- (h1): les déformations sont dans le plan ($\underline{e}_2, \underline{e}_3$);
- (h2): $u_1=0$ (déplacement nul dans le sens de la largeur);
- (h3): le problème ne dépend que de la composante X_2 .

Les résultats du calcul numérique viendront confirmer le bien fondé de ces hypothèses.

Le comportement en membrane pour la couche i s'écrit (cf.1.22):

$$\tilde{\tilde{\tilde{N}}}' = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}' : \tilde{\tilde{\tilde{\epsilon}}}' \quad i=1,2$$

Le tenseur $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}'$ s'identifie au tenseur des rigidités membranaires classique relatif à la couche i .

Avec les hypothèses précédentes et en employant la notation ingénieur [J.M.Berthelot (1992)], nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i & 0 \\ K_{12}^i & K_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_{2,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad i=1,2 \quad (2.1)$$

Les termes de rigidité K_{px}^i intervenant dans la matrice de comportement s'identifient facilement à partir des données matériau [J.M.Berthelot (1992)].

Nous posons

$$\begin{aligned} K_{11}^1 &= K_{22}^2 = K_1 \\ K_{11}^2 &= K_{22}^1 = K_2 \\ K_{12}^i &= K_{12} \\ K_{66} &= G \end{aligned}$$

A l'interface, nous pouvons calculer les rigidités de cisaillement d'interface grâce à la formule (1.45). La matrice de rigidité de cisaillement d'interface est alors diagonale et son terme général vaut $K = \frac{G}{e}$.

En posant $\tilde{\tau}^{0/90} = \tilde{\tau}$ et $\tilde{D}^{0/90} = \tilde{D}$, le comportement (1.45) à l'interface s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où $D_2 = u_2^2 - u_2^1 + e \cdot u_{3,2}$ ($u_3^1 = u_3^2$ puisque nous utilisons le modèle M4 simplifié)

Les équations (1.31) du problème s'écrivent:

$$\begin{aligned} N_{11,1}^1 + N_{12,2}^1 + \tau_1^{1,2} &= 0 \\ N_{12,1}^1 + N_{22,2}^1 + \tau_2^{1,2} &= 0 \\ N_{11,1}^2 + N_{12,2}^2 - \tau_1^{1,2} &= 0 \\ N_{12,1}^2 + N_{22,2}^2 - \tau_2^{1,2} &= 0 \\ e \cdot (\tau_{1,1}^{1,2} + \tau_{2,2}^{1,2}) &= 0 \end{aligned}$$

Nous posons $X_2 = x$

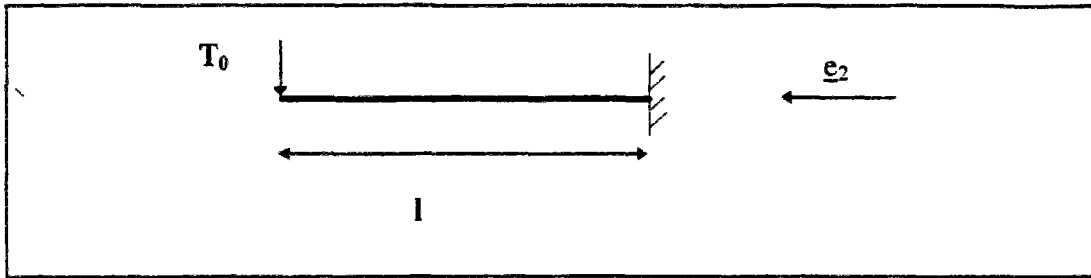
A partir des relations de comportement (2.1) et (2.2), nous obtenons les équations du problème, qui se réduisent à trois utiles:

$$e \cdot K_2 \cdot u_{2,x}^1(x) + K \cdot D_2(x) = 0 \quad (2.3)$$

$$e \cdot K_1 \cdot u_{2,x}^2(x) - K \cdot D_2(x) = 0 \quad (2.4)$$

$$D_{2,x}(x) = 0 \quad (2.5)$$

Nous introduisons maintenant le chargement et les conditions aux limites:



Les conditions aux limites (1.32) se traduisent:

pour le bord libre par:

$$\begin{aligned} N_{12}^1(l) &= 0 \\ N_{22}^1(l) &= 0 \\ N_{12}^2(l) &= 0 \\ N_{22}^2(l) &= 0 \end{aligned}$$

pour le chargement extérieur par

$$e \cdot \tau_2^{1,2}(l) - T_0 = 0$$

pour l'encastrement par

$$u_1^i(0) = u_2^i(0) = u_3(0) = 0$$

Grâce aux relations de comportement (2.1) et (2.2), ces conditions aux limites s'écrivent:

$$u_{2,x}^1(l) = 0 \quad (2.6)$$

$$u_{2,x}^2(l) = 0 \quad (2.7)$$

$$K \cdot D_2(l) = \frac{T_0}{e} \quad (2.8)$$

$$u_2^1(0) = 0 \quad (2.9)$$

$$u_2^2(0) = 0 \quad (2.10)$$

$$u_3(0) = 0 \quad (2.11)$$

Le problème mécanique est ainsi traduit par des équations mathématiques (2.3-2.11). La résolution est simple. En posant $t = \frac{T_0}{e}$, nous obtenons:

$$\frac{u_2^1(x)}{t} = \frac{-1}{K_2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - l \cdot x \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{u_2^2(x)}{t} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - l \cdot x \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{u_1(x)}{t} = \frac{x}{K} + \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \cdot \left(\frac{-x^3}{6} + \frac{l \cdot x^2}{2} \right) \quad (2.14)$$

Remarque:

Si l'on suppose la poutre isotrope et que l'on adopte la théorie d'Euler Bernouilli avec prise en compte du cisaillement, la flèche $v(x)$ peut s'exprimer à partir des formules de Bresse par:

$$v(x) = \int_0^x (x - \zeta) \frac{M(\zeta)}{EI} d\zeta - \int_0^x \frac{T(\zeta)}{G\Omega_1} d\zeta \quad (\text{avec des notations évidentes})$$

$$\text{avec} \quad \Omega_1 = \frac{5}{3} e$$

$$\text{le moment } M(\zeta) = T_0(l - \zeta)$$

$$\text{l'effort tranchant } T(\zeta) = -T_0$$

La flèche s'écrit alors:

$$v(x) = \frac{3T_0}{5GE} x + \frac{T_0}{EI} \left(\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

En comparant cette dernière expression à l'expression (2.14) ci-dessus, nous voyons bien que le modèle M4 est un modèle qui prend en compte le cisaillement ou encore l'effort tranchant.

II.1.2. Comparaison entre les résultats analytiques et les résultats numériques du M4s

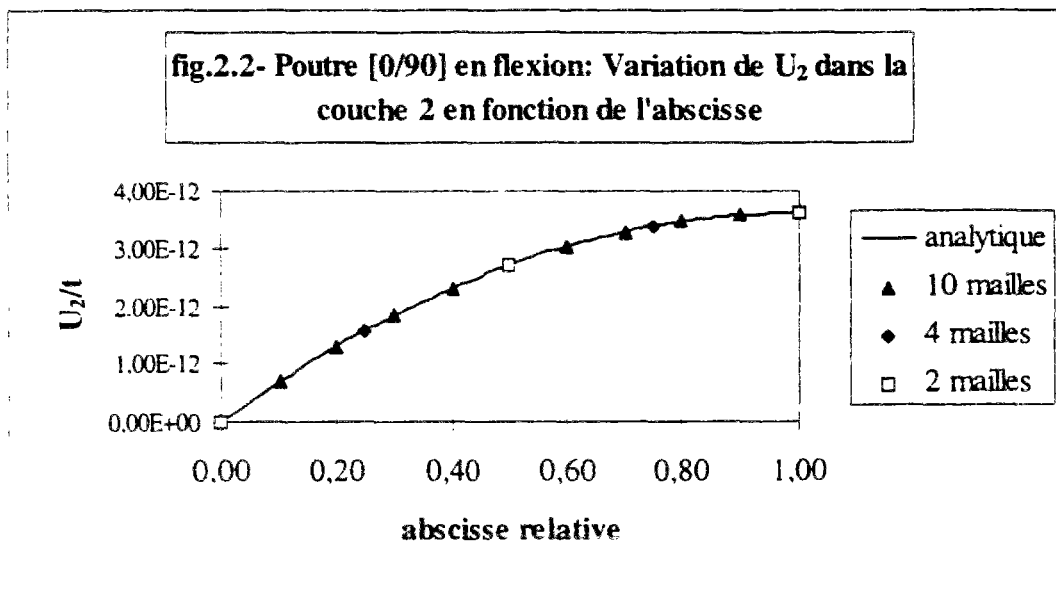
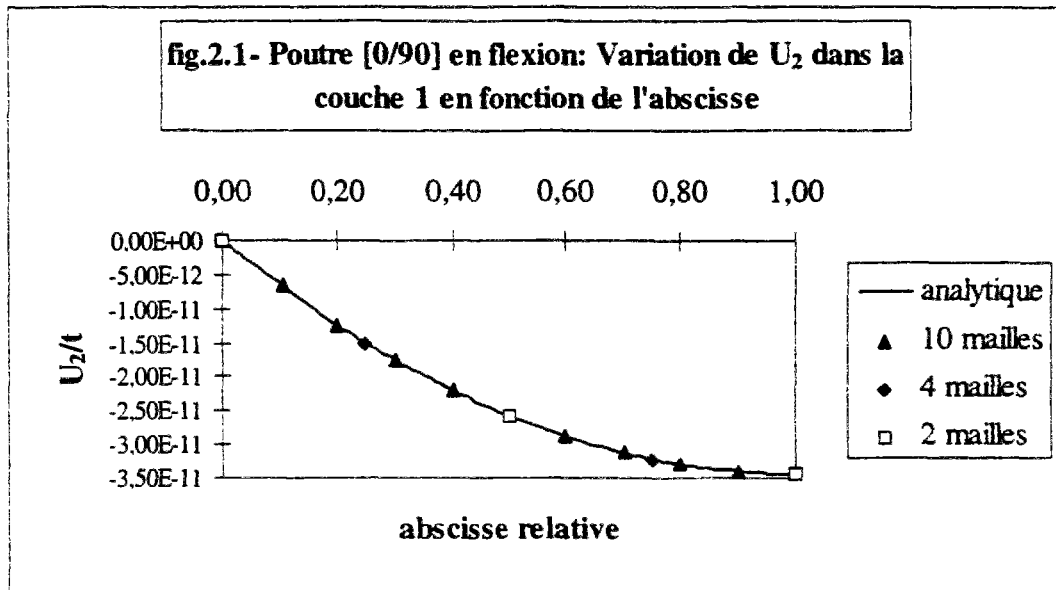
Pour le calcul numérique avec le M4s, on considère la structure comme une plaque puisque nous ne rentrons pas les hypothèses (h_1) , (h_2) et (h_3) . Les données sont les suivantes:

e	140 μm
$L=100$	1 m
K_1	$1.454 \cdot 10^{10}$ Pa
K_2	$1.385 \cdot 10^{11}$ Pa
K_{12}	$3.054 \cdot 10^9$ Pa
$K=G/e$	$4.186 \cdot 10^{13}$ Pa/m

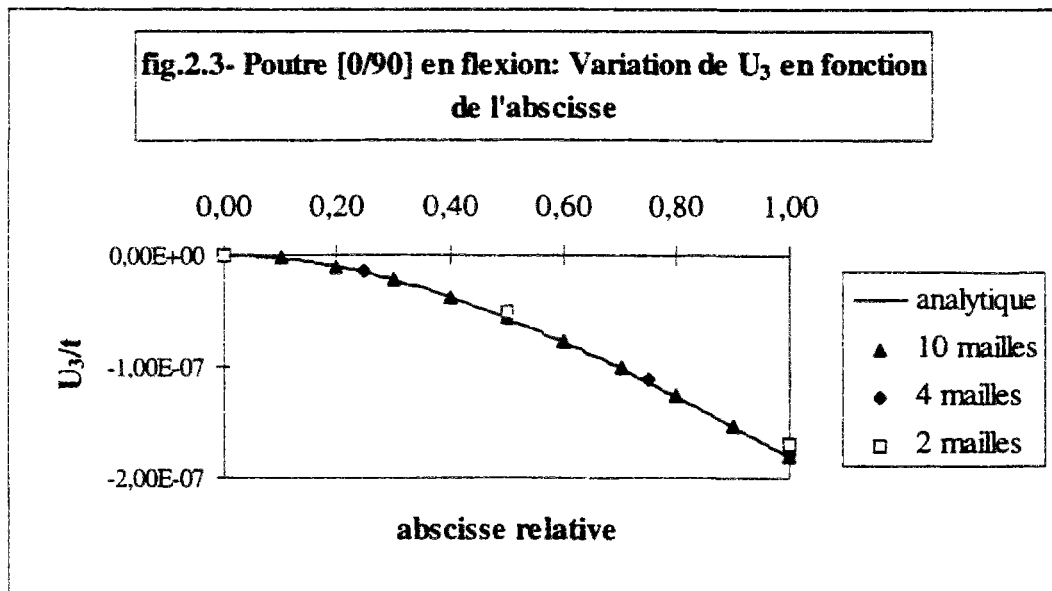
Les résultats obtenus dans le cas général montrent d'abord que les hypothèses (h_1) , (h_2) et (h_3) émises ci-haut sont tout à fait justifiées.

Les composantes 2 données par les équations (2.12) et (2.13) sont des polynômes de degré 2 en x . La précision de leur calcul est très bonne (puisque les fonctions

d'interpolation sont quadratiques); avec 2 mailles nous retrouvons déjà des points de la courbe analytique (fig.2.1, 2.2).



La composante 3, polynôme de degré 3, est calculée avec moins de précision. Cependant avec 10 mailles nous obtenons moins de 2% d'imprécision (fig.2.3). Cela est sans doute dû en partie au fait que pour le calcul analytique la structure est assimilée à une poutre (pas d'effet Poisson selon la largeur), alors que pour le calcul numérique elle est calculée comme une plaque.



Nous avons ainsi procédé à une première validation du code éléments finis en statique.

II.2. VALIDATION EN STATIQUE DE LA MAILLE M4 ET DU MODELE M4S: CAS D'UNE PLAQUE [0/90]_s EN TRACTION

Les calculs du paragraphe précédent ont apporté une première validation générale du code éléments finis en statique. La présence d'interface constituant une particularité du modèle M4s, nous avons besoin de vérifier particulièrement le calcul à l'interface. Pour ce faire, nous avons choisi de traiter l'effet de bord sur une plaque [0/90]_s en traction uniforme.

Ce problème a fait l'objet de plusieurs études analytiques et numériques. Nous disposons notamment de solutions analytiques dues à *Pagano (1978)* et de solutions éléments finis 3D dues à *Wang et Crossman (1977)*.

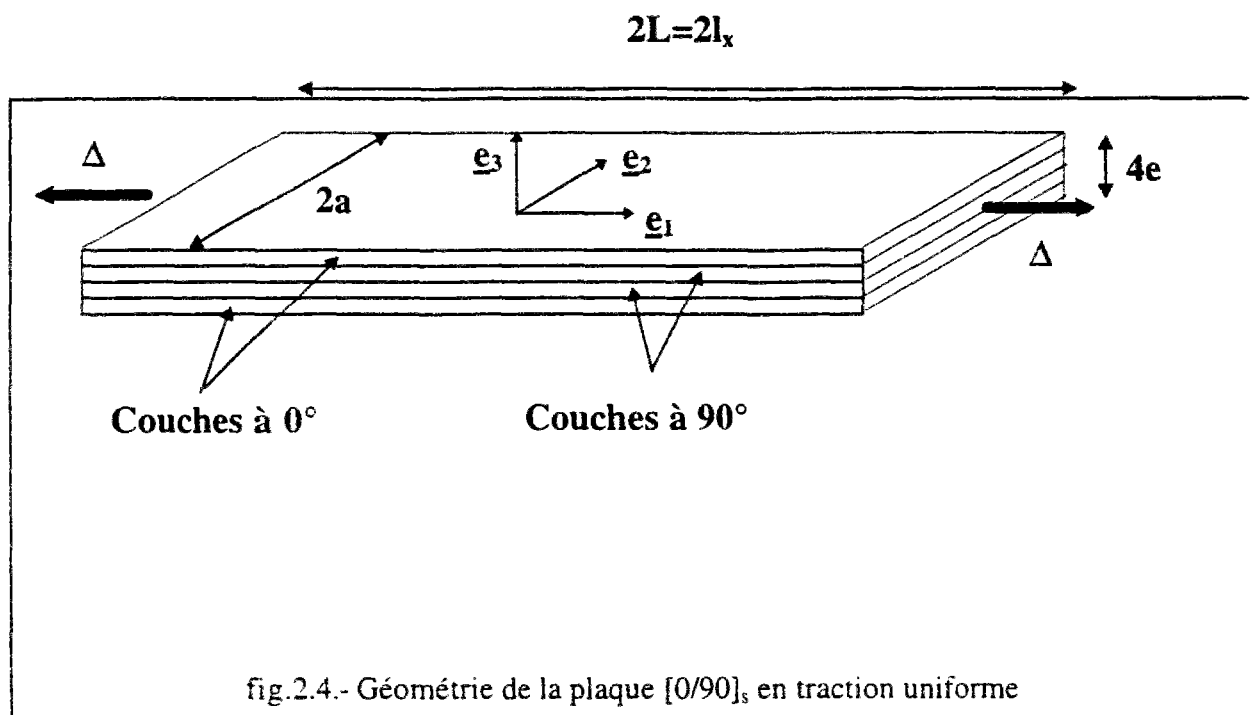
Nous allons donc commencer par présenter un calcul analytique par le M4s de la contrainte de cisaillement à l'interface. Nous comparerons ensuite la solution éléments finis M4s avec cette solution analytique.

Le calcul de la contrainte de cisaillement d'interface $\tau_2^{1-2} = \tau$ offrira enfin la possibilité de comparer cette contrainte aux contraintes équivalentes évaluées par le modèle de Pagano et le calcul éléments finis de Wang et Crossman. Cela constituera une première validation du modèle M4s en statique.

II.2.1. Résolution analytique par le M4s

La structure étudiée par *Pagano (1978)* et *Wang et Crossman (1977)* présente les caractéristiques suivantes:

$E_{11}=E_L$	137.89 GPa
$E_{22}=E_T$	14.48 GPa
$G_{12}=G_{13}=G_{23}$	5.86 GPa
$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}$	0.21



L désigne la longueur de la plaque.

Sur les plaques multicouches composites, l'effet de bord n'apparaît que sur une faible largeur. Cette largeur est de l'ordre de l'épaisseur totale de la plaque. Le choix d'une plaque de faible largeur ici, rend cet effet visible sur l'ensemble de la largeur de la plaque.

Grâce aux symétries, nous pouvons restreindre l'étude à un quart de la structure.

La symétrie du problème et la liaison cinématique $u_3^i = u_3$ permettent de dire que $u_3^i = u_3 = 0$. Le problème est donc plan.

Nous émettons ensuite les hypothèses suivantes:

$$(h_4): \quad u_j^i(X_1, X_2) = u_j^i(X_1) = \frac{\Delta}{L} X_1$$

$$(h_5) \quad u_2^i(X_1, X_2) = u_2^i(X_2)$$

La résolution du problème revient alors à déterminer les deux fonctions u_2^i .

Comme au paragraphe II.1.1., la relation de comportement permet d'écrire pour chaque couche i :

$$\begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i & 0 \\ K_{12}^i & K_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & K_{66}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} \\ u_{2,2}^i(X_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Comme au cas précédent, les termes de rigidité K_{ps}^i peuvent être identifiés facilement à partir des termes de rigidité membranaires classiques.

L'équation (1.45) permet de calculer les rigidités de cisaillement d'interface $K = \frac{G}{e}$. A chaque interface 0/90, nous pouvons alors écrire:

$$\begin{pmatrix} \tau_1^{1,2} \\ \tau_2^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^2 - u_2^1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La matrice de rigidité de cisaillement d'interface est naturellement diagonale, puisque les couches sont orientées à 0° et 90°.

Comme dans le calcul précédent, nous posons:

$$\begin{aligned} X_2 &= x \\ K_{11}^1 &= K_{22}^2 = K_1 \\ K_{11}^2 &= K_{22}^1 = K_2 \\ K_{12}^i &= K_{12} \\ K_{66} &= G \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent:

pour la 3^{ème} équation (hors plan) de (1.31):

$$\frac{e}{2} \cdot [2\tau_{2,2}^{1,2} + 2\tau_{2,2}^{2,3} + 2\tau_{2,2}^{3,4} + 2\tau_{1,1}^{1,2} + 2\tau_{1,1}^{2,3} + 2\tau_{1,1}^{3,4}] = 0 \quad (2.17)$$

et pour toute couche i :

$$N_{11,1}^i + N_{12,2}^i + \tau_j^{i,i+1} - \tau_j^{i-1,i} = 0 \quad (2.18)$$

$$N_{21,1}^i + N_{22,2}^i + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i} = 0 \quad (2.19)$$

La symétrie de la structure et du chargement assurent que $u_2^4 = u_2^1$ et que $u_2^3 = u_2^2$. Ceci implique par (2.16) que $\tau_2^{2,3} = 0$ et $\tau_2^{2,3} = -\tau_2^{3,4}$. L'équation (2.17) est alors automatiquement vérifiée.

Les équations (2.18) et (2.19) restantes s'expriment dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Grâce à la symétrie du problème, et au fait que $\tilde{\tau}_2^{2,3} = 0$, nous pouvons restreindre l'étude aux deux couches 1 et 2.

Les équations du problème se réduisent alors à:

$$e \cdot K_1 \cdot u_{2,x}^1 + K \cdot (u_2^2 - u_2^1) = 0$$

$$e \cdot K_2 \cdot u_{2,x}^2 - K \cdot (u_2^2 - u_2^1) = 0$$

La résolution de ce système est simple, et conduit aux expressions générales:

$$u_2^1 = -\frac{K_2}{K_1 + K_2} \cdot (A \cdot \cosh \omega x + B \cdot \sinh \omega x) + C \cdot x + D \quad (2.20)$$

$$u_2^2 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \cdot (A \cdot \cosh \omega x + B \cdot \sinh \omega x) + C \cdot x + D \quad (2.21)$$

avec
$$\omega^2 = \frac{K}{e} \cdot \frac{(K_1 + K_2)}{K_1 \cdot K_2}$$

Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{en déplacement} \quad & u_1^i(X_1, 0) = 0 \\ & u_2^i(X_1, 0) = 0 \\ & u_1^i(L, X_2) = \Delta \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{et pour le bord libre} \quad \tilde{N}^i \cdot \underline{n}(X_2 = a) = 0 \quad (2.23)$$

Ces conditions aux limites (2.22) et (2.23) se traduisent alors par :

$$\begin{aligned} u_2^1(0) &= 0 \\ u_2^2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$N_{22}^i(a) = 0 = K_{12} \frac{\Delta}{L} + K_{22}^i \cdot u_{2,x}^i(a) \quad (\text{bord libre})$$

En appliquant ces conditions aux expressions précédentes de u_2^1 et u_2^2 (2.20, 2.21), nous obtenons la solution:

$$u_2^1 = B.sh \omega x + C.x \quad (2.25)$$

$$u_2^2 = -\frac{K_1}{K_2} B.sh \omega x + C.x \quad (2.26)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{K}{e} \cdot \frac{(K_1 + K_2)}{K_1 \cdot K_2}$$

$$B = \frac{K_{12}}{K_1} \cdot \frac{(K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)} \cdot \frac{\Delta}{L} \cdot \frac{1}{\omega.ch \omega a}$$

$$C = -\frac{2K_{12}}{K_1 + K_2} \cdot \frac{\Delta}{L}$$

A partir de là, et grâce à l'équation (2.16)), nous pouvons exprimer analytiquement la composante 2 de la contrainte de cisaillement à l'interface 0/90 que nous noterons τ :

$$\tau = K \cdot \frac{K_{12} \cdot (K_2 - K_1)}{(K_1 \cdot K_2)} \cdot \frac{\Delta}{L} \cdot \frac{1}{\omega.ch \omega a} . sh \omega x \quad (2.27)$$

$$\text{avec } \omega^2 = \frac{K}{e} \cdot \frac{(K_1 + K_2)}{K_1 \cdot K_2}$$

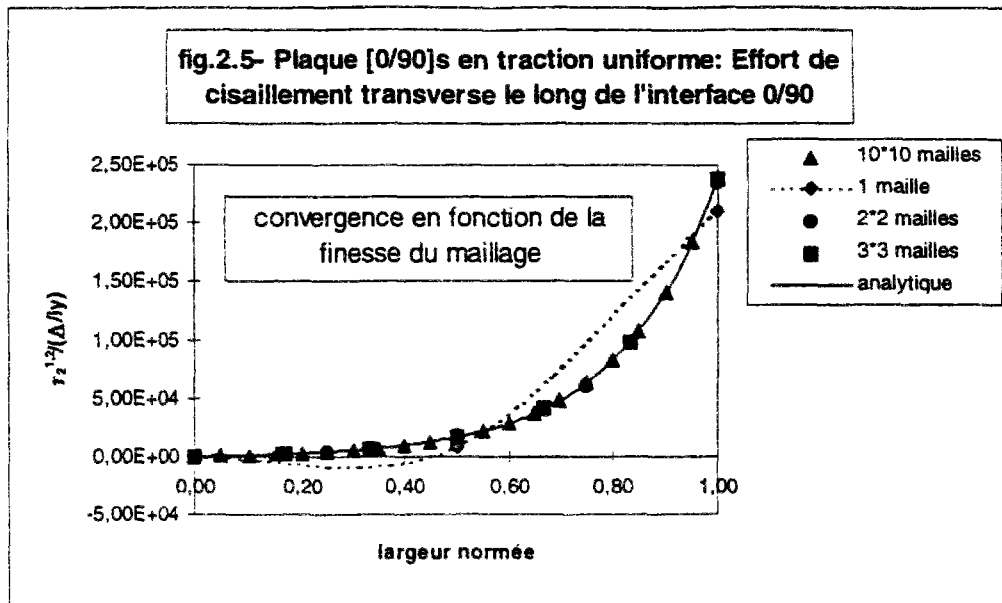
II.2.2. Comparaison entre les résultats analytiques et numériques du M4s pour le calcul à l'interface

Le problème a été calculé numériquement sans l'introduction des hypothèses (h_4) et (h_5). Les résultats obtenus permettent alors de vérifier que ces hypothèses sont tout à fait justifiées.

Dans les expressions (2.25) et (2.26) des déplacements, interviennent un terme 'membranaire' en $C.x$ et un terme 'd'interface' en $B.sh \omega x$. Le calcul montre que le terme dû à la présence d'interface $B.sh \omega x$ est relativement faible (de l'ordre de 0.1%). Le calcul des déplacements ne permet donc pas de valider le calcul à l'interface. Pour la validation du code, nous avons alors préféré retenir la contrainte d'interface τ , dont l'expression (2.27) fait apparaître uniquement un terme 'd'interface'.

A l'aide de cette contrainte τ , nous allons mesurer la précision des résultats numériques du M4s.

La figure (2.5) montre la rapidité de convergence des résultats. Il suffit en effet de 2 ou 3 mailles pour obtenir numériquement des points de la courbe analytique. Pour 10 mailles, la précision est meilleure que 0.1%.

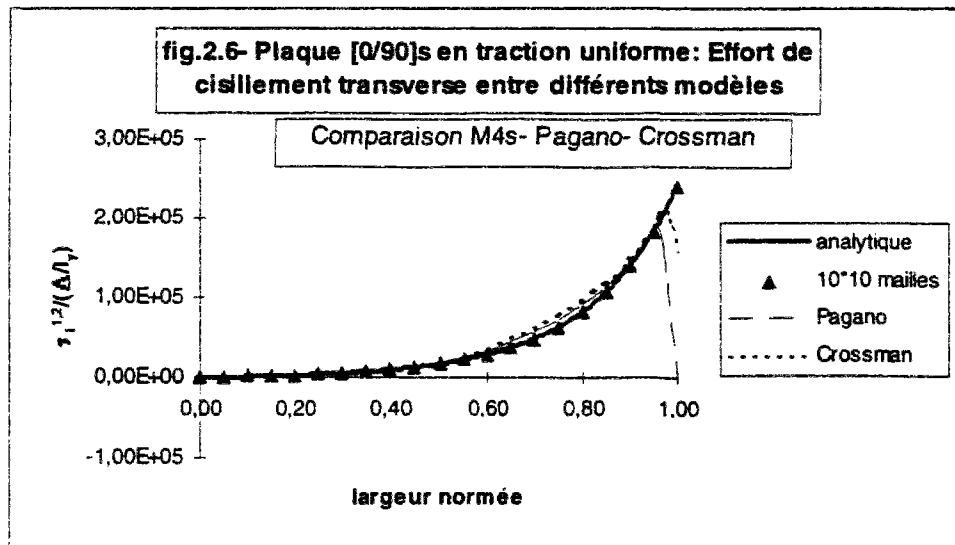


Le modèle M4s présente la particularité, pour des problèmes en déformations planes, de pouvoir calculer la valeur de la contrainte de cisaillement d'interface τ juste au bord; Lorsqu'en effet la composante 3 du déplacement est nulle, cette contrainte peut s'exprimer uniquement à partir des déplacements dans le plan de la plaque (cf. 1.33).

Cette propriété peut présenter un intérêt particulier pour l'étude du délaminage. Les modèles classiques en effet, n'ont généralement la possibilité de calculer des contraintes qu'aux points de Gauss qui sont à l'intérieur de la structure.

II.2.3. Validation du modèle M4s en statique: Comparaison aux résultats des modèles de Pagano et de Wang et Crossman

L'effet de bord peut être représenté par les contraintes transverses hors plan. Pour le modèle M4s, l'information à l'interface est résumée dans la contrainte τ . Nous allons ici comparer cette contrainte aux contraintes équivalentes calculées par les modèles de *Pagano (1978)* et de *Wang et Crossman (1977)*.



Les résultats de la figure (2.6) inspirent plusieurs remarques:

- l'allure des trois courbes est semblable ainsi que leur amplitude;
- la courbe du M4s passe par les pics des deux autres courbes.

Ces constatations laissent penser que la contrainte τ du M4s représente un outil potentiel, et d'accès facile, pour aller étudier le délaminage et l'effet de bord.

Nous constatons l'efficacité et la simplicité d'accès du modèle M4s à des grandeurs à l'interface, qui régissent le délaminage et représentent l'effet de bord. La courbe précédente apporte une preuve de sa pertinence.

Dans le cadre de la modélisation M4s, le cisaillement d'interface $\tau_2^{1-2} = \tau$ n'est pas nul au bord, alors que dans le cadre d'une approche 3D, ce cisaillement est nul. Il est ainsi exactement nul dans l'approche de Pagano (condition de bord libre) et approximativement nul pour le calcul éléments finis (qui essaye de s'approcher au mieux du zéro).

En fait, comme nous l'avons mentionné au §.I.2.1., le modèle M4s autorise les discontinuités de cisaillement. Si nous intégrons l'équation (1.35): $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$ de l'équilibre 3D, nous mettrions en relation la divergence des contraintes de cisaillement τ du M4 et la contrainte normale 3D. Cette discontinuité de cisaillement pour le M4s se traduirait donc par un Dirac au niveau de la contrainte normale, ou encore par une concentration de contrainte normale au bord.

Les deux courbes (fig.2.6) de *Pagano (1978)* et de *Wang et Crossman (1977)* présentent au bord des valeurs maximales différentes. L'intégrale de ces contraintes sur une certaine distance au voisinage du bord donnerait cependant des valeurs voisines, ce qui rappelle un critère en contrainte normale moyenne. L'intensité du Dirac lié à la discontinuité de τ au bord dans le cadre du M4s joue un rôle équivalent à cette intégrale. Un critère de délaminage en contrainte

normale moyenne pourrait ainsi être ramené à un critère équivalent de cisaillement maximal à l'interface pour le modèle M4s.

II.3. VALIDATION DU MODELE M4S EN STATIQUE: CAS D'UNE PLAQUE [90/0]_s TROUÉE EN TRACTION UNIFORME

L'étude de la plaque trouée constitue une nouvelle occasion pour valider le modèle M4s en statique.

Dans ce paragraphe, il s'agit de comparer les contraintes définies dans le cadre du modèle M4s, aux contraintes similaires définies par d'autres modèles 2D ou 3D plus classiques.

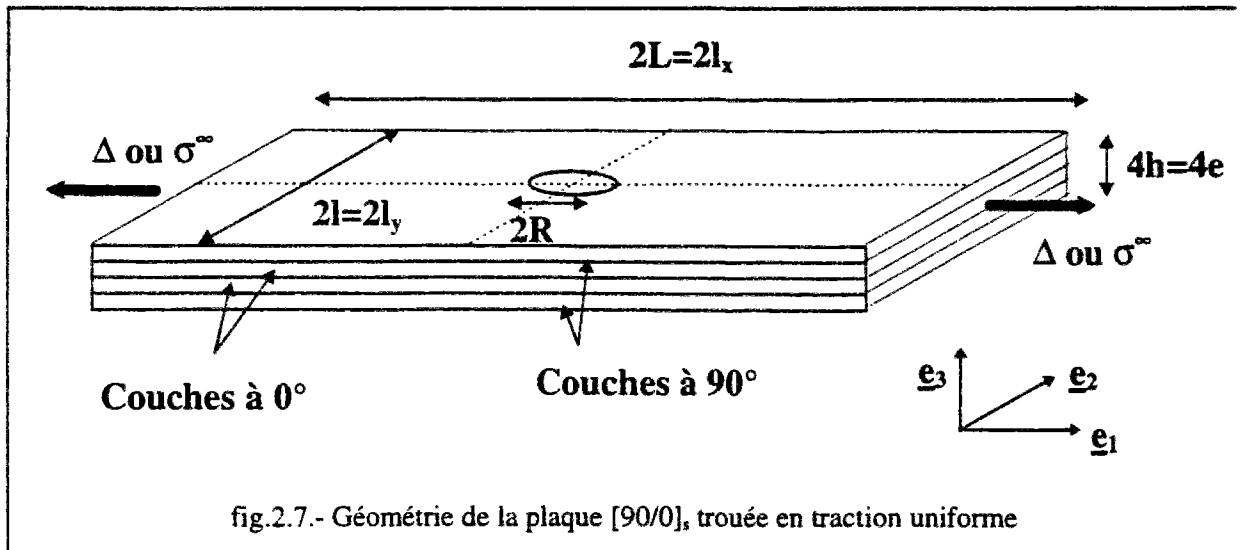
Nous validerons les contraintes membranaires et les contraintes à l'interface.

Pour les contraintes membranaires, il s'agira de vérifier qu'elles s'identifient effectivement aux contraintes membranaires dans les monocouches données par les modèles classiques, cette affirmation ayant été avancée lors de la définition du comportement pour le modèle M4s (cf.I.2.2).

Pour le calcul à l'interface, nous comparerons les contraintes du modèle M4s aux contraintes similaires d'une modélisation éléments finis tridimensionnels.

II.3.1. Le problème étudié

La plaque étudiée présente la géométrie suivante:



Nous avons la possibilité d'imposer des déplacements aussi bien que des contraintes aux bords.

Les caractéristiques mécaniques sont celles du paragraphe précédent à savoir:

$E_{11}=E_L$	137.89 GPa
$E_{22}=E_T$	14.48 GPa
$G_{12}=G_{13}=G_{23}$	5.86 GPa
$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}$	0.21

L'épaisseur d'une couche est égale à 140 microns. Le rayon du trou vaut $R=20 \cdot h$.

Les symétries que présentent la structure et le chargement permettent de restreindre l'étude au quart de la plaque. Le maillage adopté (figure 2.8) est un maillage progressif qui va en s'affinant à l'approche du trou.

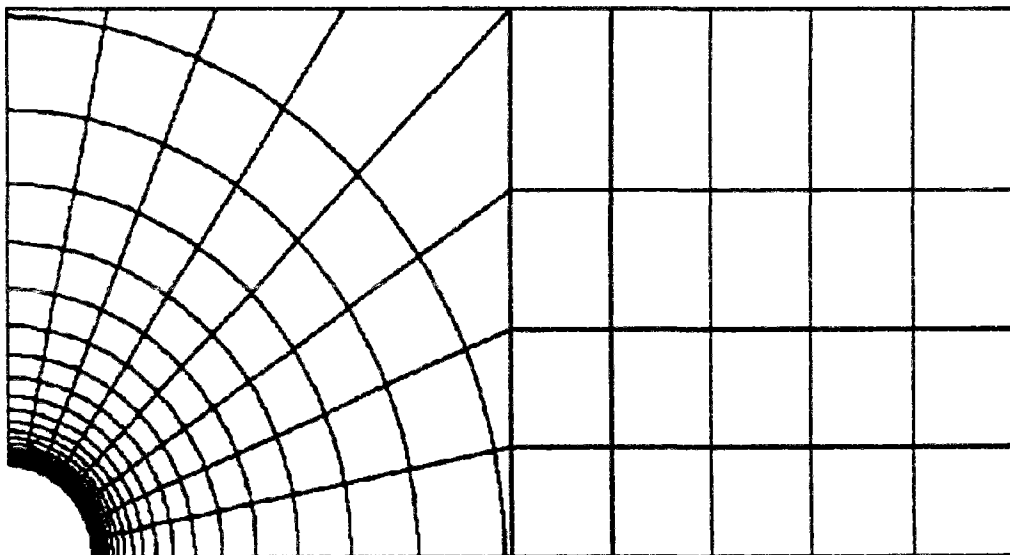


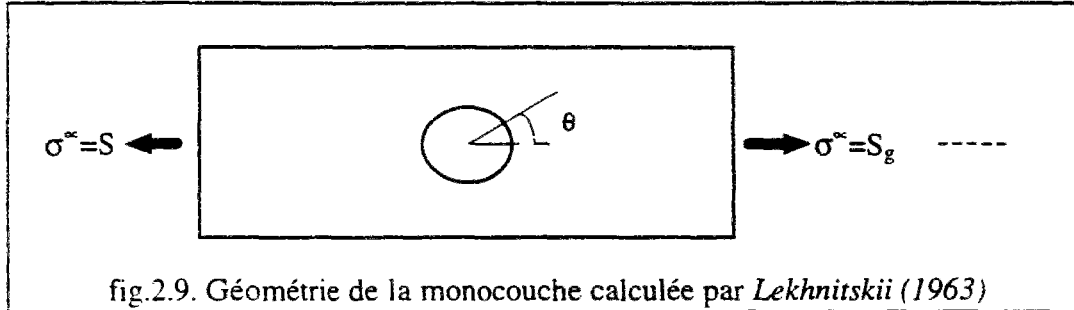
Fig.2.8.- Maillage pour la plaque trouée

II.3.2. Validation du calcul des contraintes membranaires à partir d'une solution analytique de Lekhnitskii

La définition du comportement pour le M4s repose sur une hypothèse d'égalité entre les efforts membranaires du M4s et ceux définis par les modèles classiques (cf.I.2.2).

Nous allons donc vérifier si cette hypothèse est justifiée. Nous procéderons ainsi à une nouvelle validation du modèle M4s.

Pour ce faire, nous disposons des solutions analytiques 2D dues à Lekhnitskii (1963) établies pour des monocouches orthotropes (supposées de longueur infinie):



Soient alors E_1 , E_2 et E_θ les modules d'Young respectivement dans les directions 1,2 et θ , G le module de cisaillement et enfin ν_1 le coefficient de Poisson.

En posant: $k = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2}$

$$n = \left[2 \cdot \left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_1\right) + \frac{E_1}{G}\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2 \cdot \nu_1}{E_1}\right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_2}$$

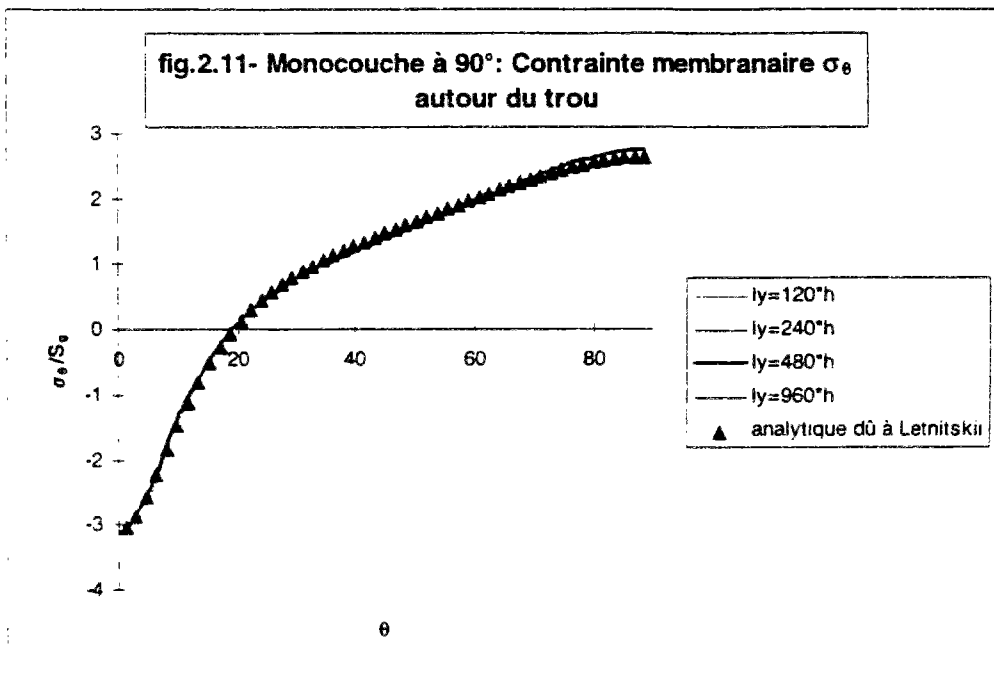
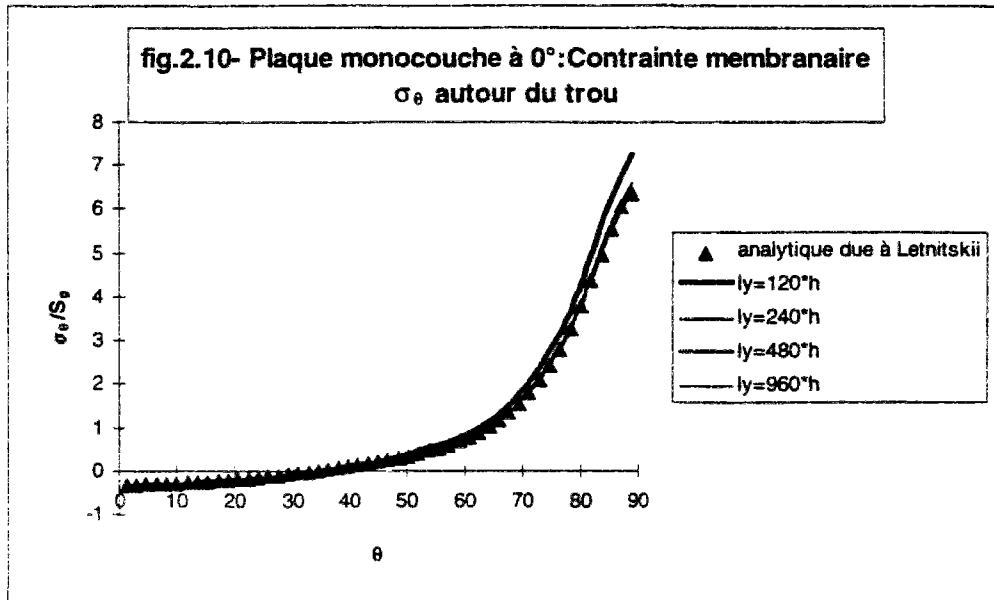
la contrainte membranaire orthoradiale s'écrit [S.G.Lekhnitskii (1963)]:

$$\sigma_\theta = S_g \cdot \frac{E_\theta}{E_1} \cdot [-k \cdot \cos^2 \theta + (1+n) \cdot \sin^2 \theta] \quad (2.28)$$

Le modèle M4 ne permet pas la modélisation d'un objet par une seule couche. Nous allons alors modéliser une monocouche par l'ensemble de quatre couches identiques d'épaisseur quart. Les interfaces ne travaillent pas.

En partant de la plaque trouée (fig.2.7), il nous suffit de supposer que les quatre couches sont identiques pour se ramener au calcul d'une plaque monocouche.

Ne pouvant pas retenir des dimensions infinies de plaque pour les calculs numériques, nous allons montrer que les résultats convergent vers la solution analytique lorsque la taille augmente.



Les résultats numériques (fig.2.10. et 2.11.) ont été obtenus avec des longueurs de plaque $L=120 \cdot h$, $L=240 \cdot h$, $L=480 \cdot h$ et $L=960 \cdot h$; Il y a bien convergence vers la solution analytique lorsque la longueur de la plaque augmente.

II.3.3. Validation du calcul des contraintes d'interface à partir d'une solution éléments finis 3D

Pour les contraintes transverses à l'interface, nous reprenons la plaque trouée $[90/0]_s$ (fig.2.7). Nous allons comparer les résultats du M4s à ceux donnés par une résolution éléments finis 3D effectuée par *Raju et Crews (1982)*.

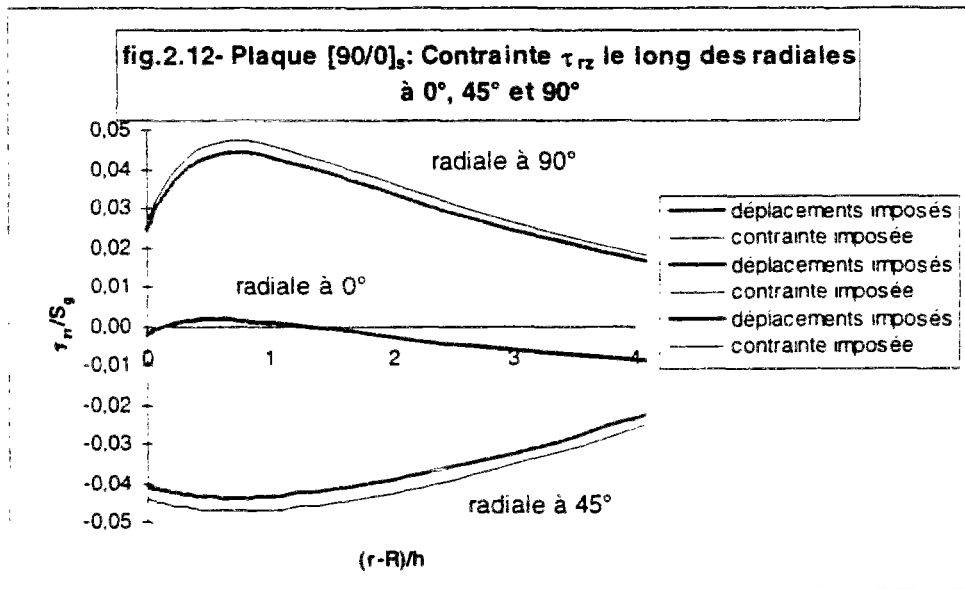
Comme dans le paragraphe précédent, le fait que $(u_3=0)$ permet de calculer les contraintes de cisaillement d'interface directement à partir des déplacements aux noeuds. Nous pouvons alors, pour le M4s, calculer ces contraintes exactement sur le bord du trou.

Nous nous plaçons en coordonnées polaires et nous définissons pour le M4s les contraintes de cisaillement d'interface τ_{rz} et $\tau_{\theta z}$ par:

$$\tau_{rz} = \cos\theta \cdot \tau_1 - \sin\theta \cdot \tau_2 \quad (2.29)$$

$$\tau_{\theta z} = \sin\theta \cdot \tau_1 + \cos\theta \cdot \tau_2 \quad (2.30)$$

La figure 2.12 représente la contrainte τ_{rz} le long des radiales à 0° , 45° et 90° .



Nous la comparons à la figure 2.13 qui représente la contrainte équivalente σ_{rz} de la modélisation 3D, le long des mêmes radiales.

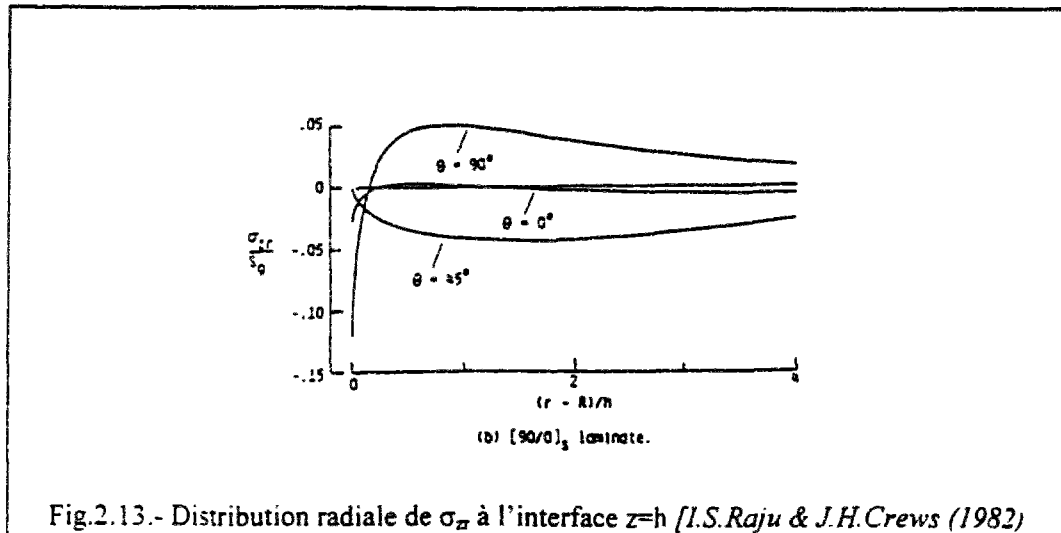


Fig.2.13.- Distribution radiale de σ_z à l'interface $z=h$ [I.S.Raju & J.H.Crews (1982)]

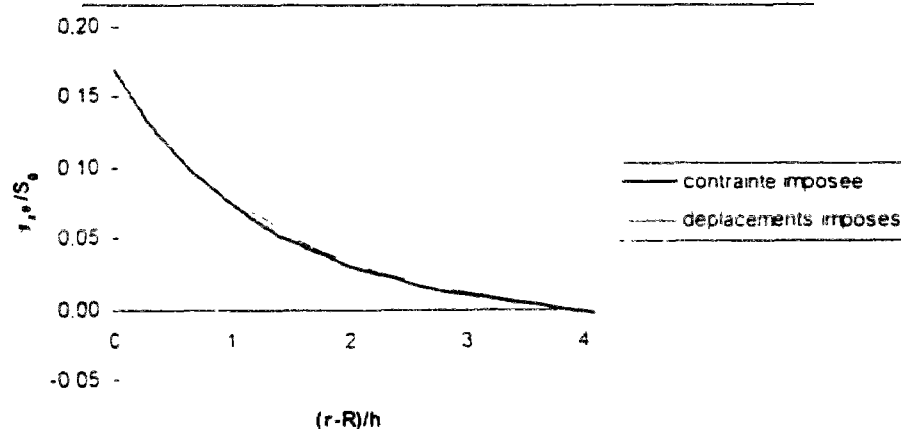
Mise à part la zone proche du trou, il semble qu'il y a concordance des résultats entre la contrainte τ_{rz} du M4s et la contrainte σ_{rz} du modèle 3D.

L'écart enregistré près du trou peut s'expliquer. Le modèle éléments finis 3D calcule en effet les contraintes aux points de Gauss. Il ne peut donc les calculer juste sur le bord du trou. Pour se rapprocher du trou, il est obligé de mailler très fin près du trou. Les auteurs de ce travail [I.S.Raju, J.H.Crews (1982)] soulignent alors l'existence d'une singularité au bord du trou, traduite par une valeur du maximum de σ_{rz} dépendant de la finesse du maillage 3D utilisé.

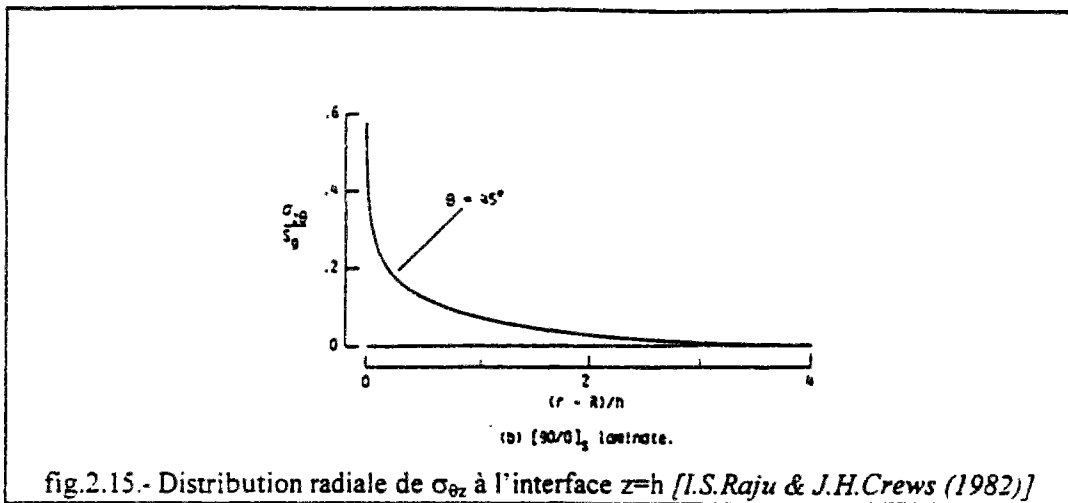
Ces remarques mettent en évidence cet avantage qu'a le M4s de pouvoir calculer la contrainte de cisaillement d'interface juste sur le bord (dans le cas de problèmes à déformations dans le plan de la plaque).

La figure 2.14 représente $\tau_{\theta z}$ le long de la radiale à 45° . Les conditions de symétrie sur les deux axes de la plaque font que $\tau_{\theta z}$ est nulle le long des radiales à 0° et 90° .

fig.2.14- Plaque trouée $[90/0]_2$: Contrainte $\tau_{\theta z}$ le long de la radiale à 45°

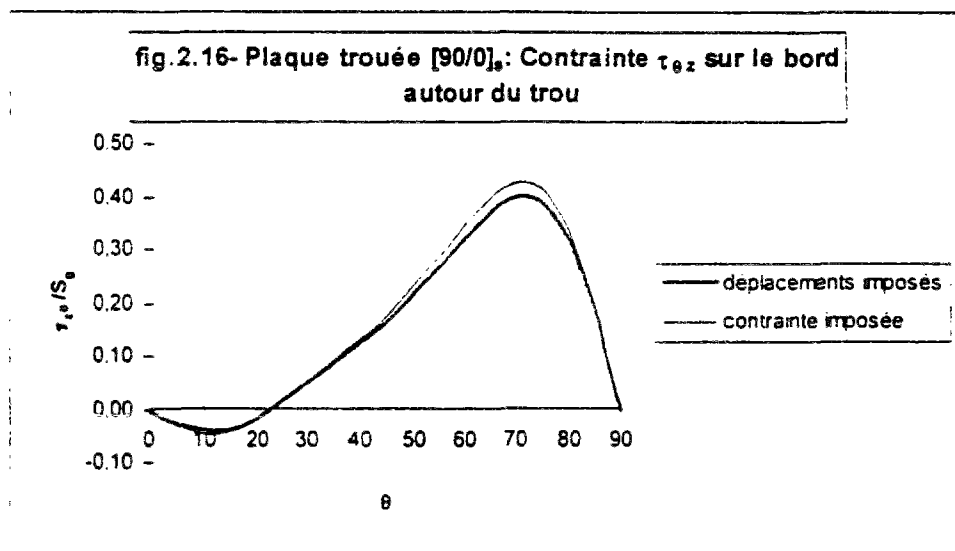


$\tau_{\theta z}$ présente la même allure que $\sigma_{\theta z}$ donnée par la figure 2.15.

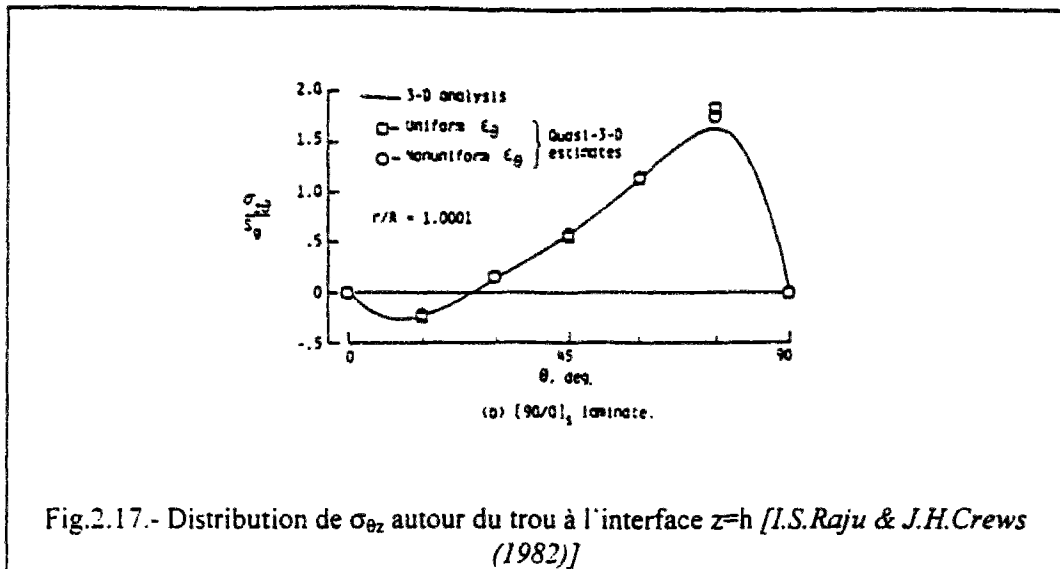


A l'approche du trou, les amplitudes sont encore différentes. La cause, comme nous l'avons expliqué plus haut, consiste en la présence d'une singularité en 3D au droit du trou.

La figure 2.16 représente $\tau_{\theta z}$ sur le bord tout autour du trou.

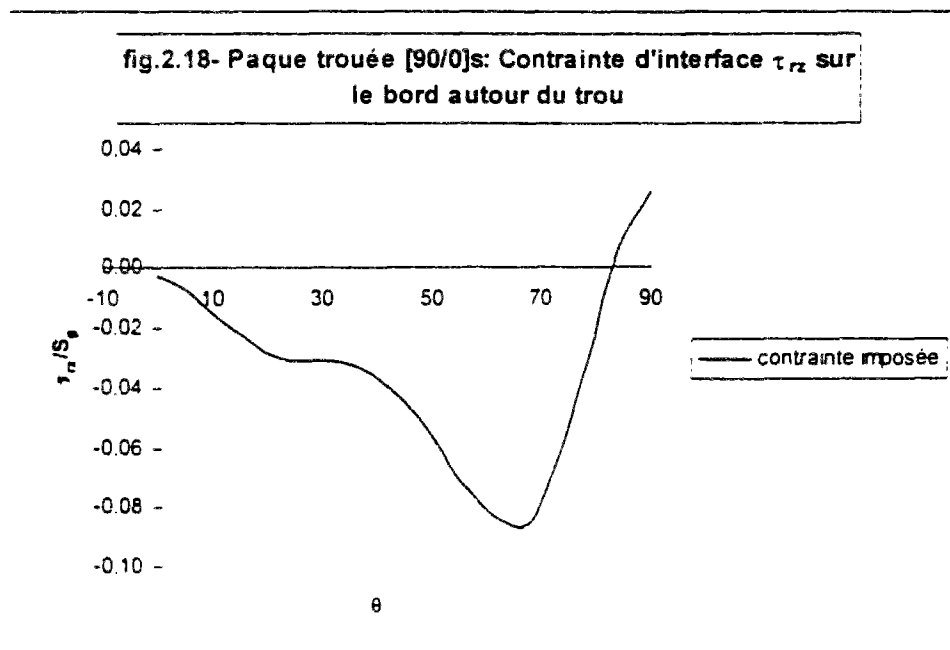


Elle présente les mêmes variations que la courbe de la figure 2.17 représentant $\sigma_{\theta z}$ autour du trou.



Les maxima des deux courbes correspondent à un angle d'environ $\theta=75^\circ$. La différence d'amplitude vient encore du fait que le modèle éléments finis 3D n'est pas autorisé à calculer la contrainte $\sigma_{\theta z}$ sur le bord même du trou.

Enfin, la figure 2.18 représente la contrainte τ_{rz} sur le bord tout autour du trou. Le maximum de $|\tau_{rz}|$ semble se situer à environ $\theta=65^\circ$.



La contrainte équivalente σ_{rz} pour le modèle 3D est nulle (condition de bord libre). Là encore, comme nous l'avons expliqué au §.II.2.3., un critère en contrainte normale moyenne peut être ramené à un critère plus simple en contrainte maximale de cisaillement à l'interface dans le cadre du modèle M4s. Cet extremum enregistré peut donc être d'une grande importance si un tel critère de délaminage est défini.

II.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre de validation, nécessaire avant d'entamer l'étude du problème des plaques multicouches impactées en dynamique, nous avons pu procéder à une validation de la partie statique du code de calcul par éléments finis, destiné à traiter le cas dynamique. Lors de la construction d'un code de calcul, il est important de procéder à des validations intermédiaires. La validation ici a permis en particulier de vérifier les procédures de résolution en statique, qui comme nous le verrons plus tard, seront à la base de la résolution en dynamique.

Par ailleurs, ce chapitre a permis de vérifier la cohérence des hypothèses et simplifications émises dans le cadre de la construction du M4s. Nous avons ainsi vérifié que les contraintes membranaires dans le cadre du M4s s'identifient effectivement aux contraintes membranaires définies dans le cadre des modèles classiques.

Le résultat essentiel reste sans doute la liaison établie entre les contraintes de cisaillement à l'interface pour le M4s et les contraintes qui régissent le délaminage dans d'autres modèles (analytiques ou 3D). Nous avons ainsi pu observer qu'un critère de délaminage en contrainte normale moyenne peut être ramené dans le cadre du M4s à un critère plus simple en contrainte de cisaillement maximale à l'interface. La contrainte de cisaillement à l'interface pour le M4s constitue donc un candidat potentiel intéressant et d'accès simple pour l'étude du délaminage.

La réponse a été ainsi apportée à la première des deux questions que nous nous sommes proposés de traiter: les efforts d'interface que fait apparaître le modèle M4s peuvent effectivement être reliés au phénomène de délaminage.

Il s'agit à présent de traiter la deuxième question: est-ce que le modèle proposé est capable de fournir de manière simple et rapide des informations relatives au délaminage des structures multicouches soumises à l'impact de charges dynamiques? Ou encore quelles sont les performances du modèle M4s quant au délaminage en dynamique?

PARTIE B

MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES PLAQUES MULTICOUCHES IMPACTEES

III. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés au problème de l'impact sur les plaques multicouches. L'intérêt qui s'est porté sur ce thème ces deux dernières décennies, et qui s'est accru encore plus récemment, montre qu'il représente actuellement un sujet de recherche actif, en atteste le nombre important d'articles publiés chaque année.

Nous essayons dans ce chapitre d'effectuer une synthèse des résultats existant dans la littérature.

Les objectifs de ce chapitre peuvent être résumés en trois points:

- d'abord mieux comprendre le phénomène de l'impact sur les plaques multicouches et se familiariser avec les différents concepts s'y référant;
- essayer ensuite de placer notre étude dans un contexte plus général de modèles mathématiques et d'études numériques;
- présenter enfin l'essentiel des résultats que nous avons trouvés dans la littérature et que nous avons jugés utiles pour la suite de notre démarche.

Nous commencerons donc par introduire le phénomène d'impact, en évoquant quelques méthodes de classification des problèmes d'impact à partir des concepts simples de masse et de vitesse du projectile et du concept d'ondes dans la structure.

Le deuxième paragraphe présente dans leur grandes lignes les informations expérimentales utiles pour cette étude ainsi que pour ses perspectives. Certains détails de résultats ne seront évoqués que dans les chapitres réservés à l'évaluation des résultats numériques;

Le troisième paragraphe sera consacré au problème du contact entre la structure et le projectile, et plus particulièrement aux lois qui peuvent modéliser ce contact.

Le quatrième paragraphe présentera enfin les familles de modélisations plus complexes utilisées, que nous avons appelées modèles mathématiques.

Nous pourrons alors situer notre étude dans son contexte général.

Toute cette démarche permettra d'entrevoir le domaine de pertinence et d'efficacité de notre modèle numérique et de préparer le champ à l'évaluation des résultats et la validation de l'étude.

III.1. INTRODUCTION DU PHENOMENE D'IMPACT SUR PLAQUES MULTICOUCHEES

Par impact, nous faisons référence à l'impact physique, défini comme un événement impliquant la collision de deux objets.

Les impacts sur composites laminés couvrent une gamme d'exemples multiples et variés: cela peut aller des impacts lents tels que la chute d'outils lors des opérations d'élaboration ou d'entretien, jusqu'aux impacts beaucoup plus rapides tels que l'impact d'un caillou, d'un oiseau, ou de la glace sur les lames des turbines d'avions, ou encore le choc des vagues contre les bateaux constitués d'épais laminés en fibres de verre.

A travers cette variété, nous allons ici évoquer deux classifications des impacts: une classique et une plus physique.

La classification classique s'appuie sur les concepts simples de masse et de vitesse du projectile, qui sont généralement des données du problème;

L'autre classification, dite phénoménologique, s'intéresse au phénomène physique d'ondes transitoires, tout en essayant de déterminer le type d'onde dominant la réponse.

III.1.1. Classification classique des impacts sur plaques multicouches

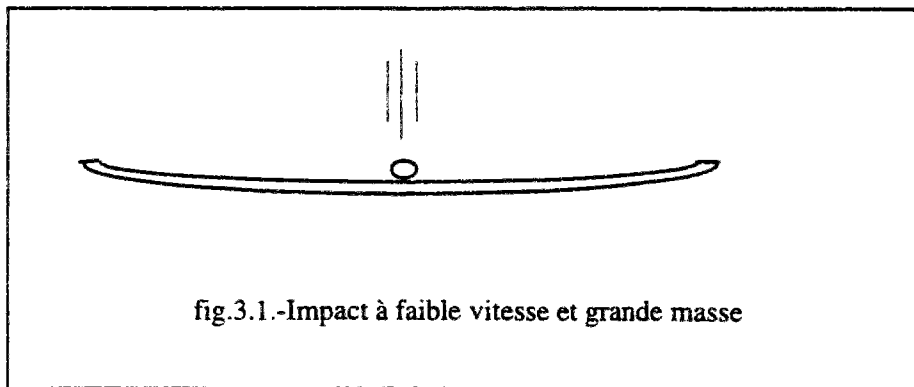
Classiquement, plusieurs façons ont été utilisées pour classer ces impacts [S.Abrate (1991)].

Quelques auteurs établissent une classification à partir de la seule donnée de la vitesse d'impact. Par référence à la valeur de cette vitesse, ils classent alors les impacts en impacts à '*grande vitesse*' (quelques dizaines de m/s) et impacts à '*faible vitesse*' (quelques m/s), chacune de ces deux classes devant présenter des propriétés caractéristiques qui lui sont propres. Cependant, il a été observé que le choix d'une plaque suffisamment grande ou d'une masse suffisamment petite conduit, avec une vitesse faible, à des propriétés caractéristiques des impacts dits à grande vitesse.

Pour une masse donnée, la description de l'événement impact à partir de la seule énergie d'impact est donc insuffisante. La masse et la vitesse du projectile doivent donc être conçues comme deux paramètres indépendants dont peut dépendre le type d'impact.

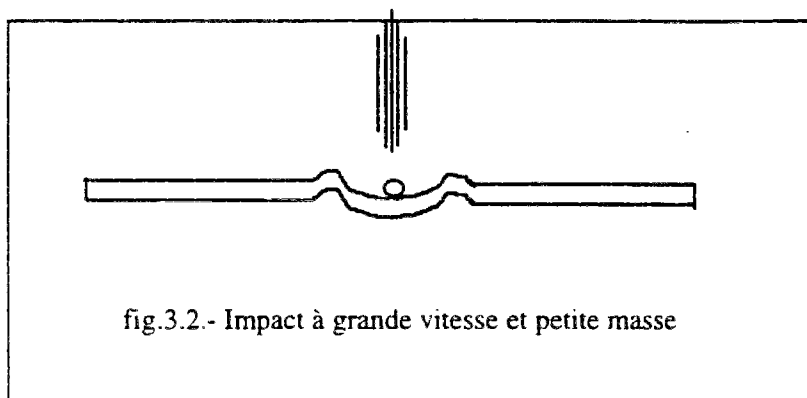
En termes simples, nous pouvons alors diviser les problèmes d'impact en deux classes:

- impacts à faible vitesse et grande masse (chute d'objets par exemple), induisant la déformation de l'ensemble de la structure (fig.3.1).



Cet impact est généralement simulé en laboratoire par la chute libre de poids ou le balancement de pendule (voir III.2.1.);

- impacts à grande vitesse et petite masse (projection de cailloux, petites armes à feu...), induisant des déformations localisées et une énergie dissipée par une petite zone au voisinage du point d'impact (fig.3.2).



Cet impact est généralement simulé par canon à gaz (voir III.2.1.).

En reprenant les termes de choc lent et de choc rapide, certains chercheurs [W.J.Cantwell & J.Morton (1989)] considèrent alors qu'un choc est rapide si la déformation reste confinée dans une zone de faible dimension, les ondes n'atteignant alors pas les bords de la structure avant la fin de l'événement. Il le considère comme lent si par contre, les ondes se réfléchissant, l'ensemble de la structure se déforme.

Il n'en reste pas moins que cette classification présente le défaut de ne pas pouvoir classer les exemples d'impacts intermédiaires, qui sont par ailleurs les plus nombreux.

III.1.2. Classification phénoménologique des impacts sur plaques multicouhes

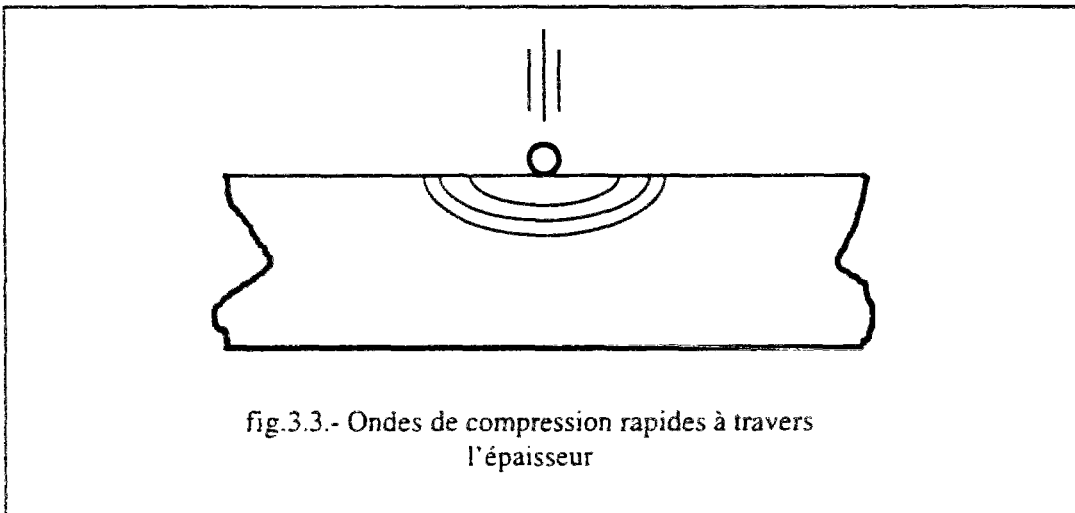
L'analyse de la réponse à l'impact d'un composite laminé peut être faite à partir d'une étude expérimentale ou d'une étude numérique. Pour planifier de telles études, il est important au préalable, de comprendre parfaitement le mécanisme et la dynamique de l'impact, c'est à dire le phénomène impact, et de pouvoir le classifier.

Une façon de comprendre le phénomène est de considérer les différents types d'ondes qui se propagent dans la structure à la suite d'un impact, et d'en déterminer celui qui est dominant.

Nous partirons d'abord du fait que la plupart des cas d'impact sur structures multicouhes peuvent être modélisés par l'impact transverse d'un projectile de petite dimension sur une plaque.

Un tel impact donne naissance à trois types d'onde, se propageant à partir du point d'impact [*R.Olsson (1992a)*]:

- des ondes rapides à travers l'épaisseur. Ces ondes de compression se réfléchissent sur la face inférieure de la plaque pour donner naissance à des ondes de traction qui se superposent. En fait, la propagation de ces ondes est sphérique. Les déformations associées sont faibles (fig.3.3).



- des ondes de traction-compression dans le plan, ainsi que des ondes de cisaillement. Ces ondes se réfléchissent sur les bords latéraux de la plaque.

- des ondes de flexion plus lentes, dispersives (à vitesse décroissante). Ces ondes se réfléchissent aussi sur les bords de la plaque et peuvent ainsi engendrer des déformations sur l'ensemble de la plaque (fig.3.4).

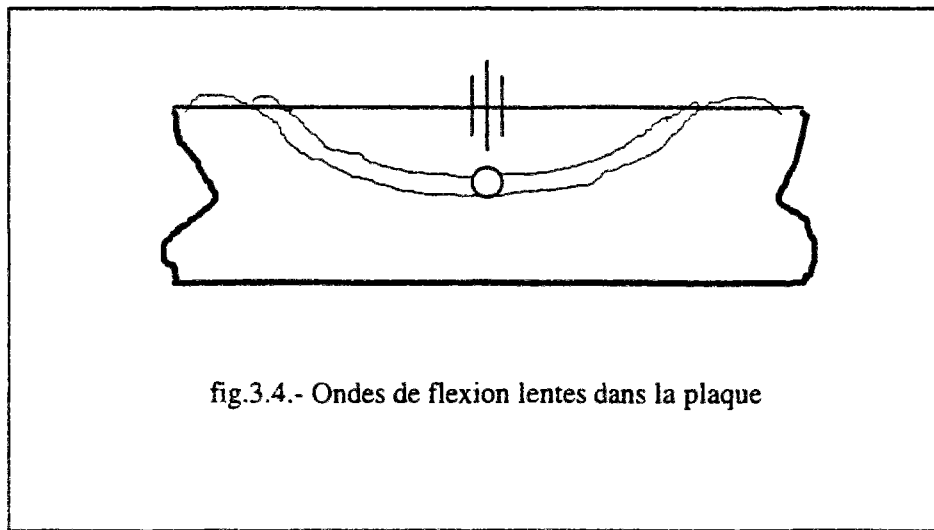


fig.3.4.- Ondes de flexion lentes dans la plaque

A partir de cette description, on se base sur un principe fondamental dû à Rayleigh pour classer les impacts en fonction de la durée du contact.

Ce principe stipule qu'un phénomène d'ondes transitoires peut être négligé dès lors que le temps d'application de la charge (correspondant à la durée de contact), est grand devant le temps nécessaire à l'onde pour se réfléchir.

Grâce à ce principe, nous pouvons établir la classification suivante [R.Olsson (1992a), S.Abrate (1991,1994)]:

Si le temps d'application de la charge, ou encore la durée de contact, sont très courts, plus exactement inférieurs à la durée t_z de parcours de l'épaisseur, ce sont les ondes à travers cette épaisseur qui gouverneront la réponse de la plaque. Les ondes n'atteignant pas la face inférieure, le problème est celui d'ondes se propageant à travers l'épaisseur. La plaque est alors assimilée à un semi-espace infini, ne fléchissant pas.

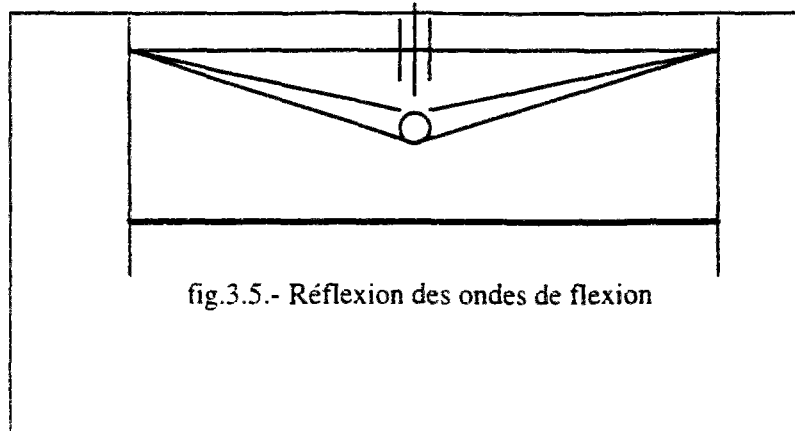
Si le phénomène d'ondes transitoires dans le projectile, appelé phénomène de 'ringing', ne peut être négligé (cas d'un projectile cylindrique long par exemple), une analyse 3D est nécessaire pour en tenir compte.

En pratique, les ondes à travers l'épaisseur sont généralement négligeables, sauf dans le cas où le rapport de l'épaisseur par la largeur est relativement élevé, ou dans le cas de chocs à très grande vitesse (s'accompagnant de faible inflexion), appelés 'chocs ballistiques', qui nécessitent eux une analyse tridimensionnelle.

Si la durée de contact est plus longue de façon à pouvoir négliger ce premier phénomène d'ondes se propageant à travers l'épaisseur, il faut considérer les ondes dans le plan de la plaque. Ces ondes gouverneront la réponse de la plaque tant que la durée de contact n'est pas suffisamment longue pour qu'elles atteignent les bords de la plaque.

Un modèle de plaque infinie est alors applicable et des approches analytiques simplifiées sont possibles. Celle de *Olsson (1992b)* par exemple, décrit le problème à l'aide d'une équation différentielle non linéaire à un seul paramètre (cf.III.4.3.c).

Pour des durées d'impact proches de la période fondamentale de vibration, il y a réflexion de l'onde de flexion (fig.3.5). Plusieurs modes doivent dans ce cas être inclus dans une étude analytique, qui devient alors inextricable [*R.Olsson (1992a)*].



Si la durée de contact est supérieure à la demi-période du plus petit mode de vibration, la réponse sera gouvernée par les conditions aux limites imposées aux bords, ou encore par le mode fondamental de vibration de la plaque. Des modèles de type masse-ressort à 1 ou 2 ddl peuvent alors être adoptés dans des cas simplifiés (cf.III.4.1.).

Enfin, si la durée de contact est largement supérieure à la plus grande période de vibration (environ 5 fois supérieure), la réponse peut être supposée quasi-statique. La force de contact et la réponse de la plaque sont alors en phase. Des modèles basés sur des bilans énergétiques (égalité entre énergie cinétique et énergie de déformation) peuvent être alors utilisés (cf.III.4.1.).

Pour résumer, nous pouvons dire qu'en pratique, et dans la plupart des cas rencontrés, la réponse à l'impact peut être classée en deux grandes catégories:

- une première catégorie où la réponse est contrôlée par les ondes (ondes de flexion essentiellement);
- une deuxième catégorie où la réponse est contrôlée par les conditions aux limites.

L'approche analytique est fondamentalement différente pour ces deux cas [*R.Olsson (1992a)*].

Le cas d'impact usuellement rencontré est une combinaison de ces deux effets, avec influence à la fois des ondes et des conditions aux limites. Une étude numérique est alors généralement nécessaire.

III.1.3. Conclusion

La plupart des impacts sur structures multicouches peuvent être modélisés par l'impact d'un projectile sur une plaque encastree ou simplement appuyée.

En considérant la masse et la vitesse du projectile comme deux paramètres indépendants, les classifications classiques parviennent à distinguer une classe de chocs lents et une classe de chocs rapides. Cependant, ces deux classes ne couvrent pas l'ensemble des types d'impact que l'on peut rencontrer.

La classification phénoménologique permet d'affirmer que les chocs dits lents correspondent à des impacts de longue durée (par rapport à t_z). Des modèles de type masse-ressort peuvent alors être adoptés.

Les chocs rapides quant à eux ne peuvent apparemment pas être considérés comme appartenant à une même classe. On peut en effet distinguer les impacts rapides, dont la réponse est dominée par les conditions aux limites ou les ondes dans la plaque (essentiellement les ondes de flexion), et les chocs très rapides pour lesquels les ondes dans le projectile doivent être pris en compte.

Il n'en reste pas moins que le cas général et usuel reste difficile à classer. Une étude numérique est alors généralement nécessaire pour déterminer la réponse de la structure.

III.2. INFORMATIONS EXPERIMENTALES SUR L'IMPACT DES PLAQUES MULTICOUCHES

Dans ce paragraphe, nous présentons les machines et les techniques expérimentales les plus utilisées dans les tests d'impact sur plaques multicouches, ainsi que les types d'empilement les plus utilisés. Cela permettra entre autres, de mieux concevoir à la fin de ce travail, les suites que l'on peut lui donner en terme d'études expérimentales.

Nous allons ensuite évoquer quelques résultats expérimentaux permettant de mieux cerner le phénomène de l'impact sur les plaques multicouches. Quelques détails de résultats expérimentaux seront évoqués, si besoin est, lors de l'évaluation des résultats numériques.

III.2.1. Les machines et les techniques expérimentales utilisées

Comme nous l'avons vu, les types d'impact que l'on peut rencontrer en pratique sont variés. Pour simuler ces impacts en laboratoire, différentes machines et techniques sont utilisées. Nous en citons les plus connues [*W.J.Cantwell & J.Morton (1991), P.Hamelin (1990)*].

a) Pendule de Charpy

Conçu à l'origine pour des métaux, il a été utilisé dans les premières études menées sur les composites. L'essai de Charpy est utilisé dans une gamme de vitesse allant de 1.5 à 2m/s et des énergies allant jusqu'à 15 joules.

L'échantillon est une poutre épaisse et courte avec une entaille au milieu. Placé verticalement, il est impacté par un pendule en balancement.

Bien que facile à mettre en oeuvre, cet essai présente beaucoup d'inconvénients; le principal concerne la méconnaissance du trajet exact de chargement, à cause de la méconnaissance de la vitesse du projectile pendant le chargement.

L'essai ne permet pas l'accès à la force réellement appliquée lors de l'impact. Son utilisation se trouve limitée par la forme de l'échantillon, qui ne correspond pas à celle des constituants typiquement utilisés par l'ingénieur. De plus, l'essai étant destructif, il induit à faible vitesse, des modes de rupture que l'on n'observe pas nécessairement en pratique.

En fait, ce test sert uniquement à classer l'impact et à déterminer, en première approximation, la résistance du matériau.

b) Test d'Izod

Il ressemble au test précédent. La poutre échantillon est de même placée verticalement en console. Elle est impactée cette fois-ci au niveau de son bord libre.

c) Chute de poids (test de Gardner...)

Un poids tombant d'une hauteur prédéterminée, vient percuter la plaque placée horizontalement. Ce test présente les mêmes inconvénients que les tests précédents, mais offre la possibilité de choisir librement la géométrie de la plaque et du projectile (cylindre, sphère...).

L'essai à poids tombant permet d'atteindre des vitesses de l'ordre de 5m/s avec des énergies variant entre 3 et 35 joules.

d) Test à la machine hydraulique

Les machines hydrauliques n'ont été utilisées que récemment. Ces tests sont plus coûteux, mais ils permettent de tester des géométries variables (double poutre console...), dans un large intervalle de taux de déformation. Le test permet de

mesurer l'évolution des déformations et d'évaluer les propriétés du matériau, comme sa résistance à la compression, son module d'élasticité... en fonction du taux de déformation, sans y adjoindre l'effet dû au contact du corps en chute (puisque'il n'y a pas de contact direct).

L'analyse des résultats permet de renseigner sur le seuil d'endommagement et le type de comportement. Mais le principal avantage demeure de pouvoir établir des lois de comportement caractérisant mécaniquement le matériau.

e) Test aux barres de Hopkinson

Comme pour le test à la machine hydraulique, ce test permet de déterminer la variation des propriétés du matériau en fonction du taux de déformation.

L'échantillon est placé entre deux barres, l'une en amont et l'autre en aval. L'onde est envoyée dans la première barre et l'information est récupérée au bout de la deuxième barre, après que l'onde ait traversé le spécimen.

Plusieurs types de tests existent (traction, compression, cisaillement, poinçonnement). L'essai en traction est destructif. On peut trouver des détails sur les procédures de l'essai dans la littérature [*J.Harding (1989)*].

f) Test au canon à gaz

Ce test est typique des chocs rapides. La vitesse d'impact peut y atteindre 300m/s.

Le gaz (nitrogène) est retenu dans une cellule, par un diaphragme en plastique au bout du canon. Grâce à un signal électrique, le diaphragme est ouvert, et un projectile guidé est projeté sur l'échantillon.

Le test n'est généralement pas complètement destructif, mais donne souvent lieu à un endommagement à grande échelle, avec possibilité de perforation.

Des développements récents ont permis de mesurer la variation de la force et du déplacement durant le test.

III.2.2. Les structures étudiées

Les plaques sont généralement carrées, de petite dimension (de l'ordre de 150mm), souvent encastrées ou sur appuis simples, l'encastrement parfait restant difficile à reproduire en pratique.

Les structures, généralement des plaques ou des poutres, sont constituées de drapages croisés (succession de plis à 0° et 90°) ou quasi-isotropes (assemblage de couches à 0°, 90°, 45° et -45°).

III.3.2. Quelques observations expérimentales sur l'impact des plaques multicouches

En dépit du nombre croissant de travaux menés sur les impacts sur multicouches, les résultats expérimentaux restent peu nombreux.

Vu la rareté de tests standards ou normalisés, les conditions d'impact sont très variées. De plus, la plupart des tests réalisés le sont avec des machines conçues pour des besoins particuliers, et dans l'objectif de tester des structures de géométrie bien définie.

Tout cela fait que la comparaison directe de résultats publiés est difficile.

Notons aussi que la plupart des travaux expérimentaux ne font pas la distinction lors de la planification de l'étude, entre réponse contrôlée par les ondes et réponse contrôlée par les conditions aux limites [R.Olsson (1992a)].

Les points d'intérêt des études expérimentales sont variés. Nous allons nous limiter ici aux points les plus utiles pour la suite de ce travail. Nous parlerons de la réponse globale, de la propagation des ondes et de certains aspects de l'endommagement.

a) Détermination expérimentale de la réponse globale

Par réponse globale nous entendons la réponse se rattachant au centre de la plaque et au centre de gravité du projectile. Il s'agit des déplacements et vitesses de ces deux points ainsi que de la force de contact qui les relie. A l'opposé, la réponse locale fait référence au champ de contrainte local au niveau de la zone de contact.

Notons que peu de travaux expérimentaux fournissent la flèche au centre de la plaque, et que des difficultés techniques accompagnent généralement les essais de mesure de la force de contact entre le projectile et la plaque.

b) Etudes expérimentales sur la propagation d'ondes

Plusieurs travaux se sont intéressés à la propagation des ondes dans les plaques multicouches impactées. La diversité et la dispersion des résultats expérimentaux nous ont conduit à insister essentiellement sur les travaux de l'équipe de l'université de Floride et ses nombreux travaux [R.L.Sierakowski & col. (1976), C.A.Ross & col. (1976), L.E.Malvern & col. (1977,1979), N.Takeda (1980), N.Takeda & col. (1980, 1981.a-b, 1982)]. Ces travaux présentent une certaine cohérence et permettent de se faire des idées claires sur le phénomène.

Les plus récents de ces travaux ont été menés avec des canons à gaz. Les matériaux en verre-epoxy semi-transparents permettent des observations directes à l'intérieur de la structure.

Il ressort de ces travaux l'existence de plusieurs types d'ondes qui parcourent la plaque. La plus dominante est une onde de flexion à faible vitesse et grande amplitude. Elle se propage à partir de la zone de contact dans différentes directions et avec différentes vitesses. Son amplitude diminue au cours de la propagation. Sa vitesse est plus grande dans la direction du module le plus élevé.

Des résultats similaires ont été obtenus par *Daniel et col. (1979)* avec des plaques en bore-epoxy et en carbone-epoxy.

Ces observations sont compatibles avec la classification phénoménologique de *Olsson (III.1.2.)*. Elles s'expliquent en effet par la gamme de vitesses relativement élevées (quelques dizaines de m/s) avec lesquelles sont menées ces expériences. Ce niveau de vitesse place ces tests plutôt dans la gamme des impacts dont la réponse est gouvernée par les ondes de flexion.

c) Etude des endommagements causés par l'impact

Pour observer l'endommagement de la structure multicouche impactée, plusieurs techniques ont été utilisées: observations microscopiques, thermographie, ultrasonique, vibrothermographie...

L'utilisation des techniques ultrasoniques est actuellement largement répandue, et les récents développements dans ce domaine permettent d'obtenir des cartes de délaminage précises pour chaque interface.

Des observations directes (durant l'impact) ont été possibles pour certains types de matériaux (semi-transparents par exemple).

Trois formes d'endommagement ont lieu: rupture de fibres, fissuration et délaminage. Les auteurs qui se sont intéressés à l'endommagement s'accordent à dire que le délaminage en est la forme principale (du point de vue absorption d'énergie).

Le délaminage est précédé par l'apparition de fissures. Un seuil d'endommagement existe, en dessous duquel les fissures apparaissent certes, mais pas le délaminage. Les fissures peuvent être transverses ou le long des fibres et peuvent ne pas se développer identiquement le long des couches.

Dépassé un certain seuil d'endommagement, le délaminage apparaît aux interfaces où l'orientation des fibres change. Il peut être caractérisé par son lieu d'apparition, sa propagation, et son étendue (surface délaminiée).

L'initiation a généralement lieu au niveau de la zone de contact. Beaucoup de chercheurs ont affirmé que ce sont les contraintes transverses et normales à l'interface qui régissent cette initiation [*S.P.Joshi & col. (1985)*, *C.A.Ross & col. (1985)*, *F.K.Chang (1990)*, *S.Abrate (1991,1994)*...]. D'où l'importance de la réponse locale (champ de contrainte au voisinage de la zone de contact) pour étudier l'initiation du délaminage.

Pour la propagation, nous devons distinguer entre la propagation à travers l'épaisseur et celle dans le plan de l'interface.

La propagation à travers l'épaisseur explique des observations expérimentales qui ont relevé moins de délaminage à l'interface supérieure qu'à l'interface inférieure de la plaque. Cette différence de comportement des deux interfaces est en effet attribuée au mécanisme séquentiel de propagation du délaminage par bandes à partir de la face supérieure impactée [*N.Takeda & col. (1981b)*]. Cet aspect séquentiel du délaminage a déjà été mis en évidence par *Cristescu et col. (1975)*, sur un empilement de couches à 0° et 90°, puis observé par *Takeda et col. (1981b)*; le délaminage commence quand une bande de largeur D (diamètre du projectile), est poussée par le projectile vers l'intérieur de la plaque. Cette bande génératrice (*generator trip*) charge ensuite transversalement le deuxième pli, initiant la formation d'une surface de délaminage entre ces deux plis. Une deuxième bande génératrice plus large et perpendiculaire à la première se forme ensuite dans le deuxième pli. Poussée à travers l'épaisseur, elle initie la formation d'une deuxième surface de délaminage entre le deuxième et le troisième pli. Le processus peut être ainsi répété. La surface délaminiée augmente d'une interface à l'autre, et on se retrouve avec plus de délaminage vers le bas de la plaque. Le délaminage continue à se propager ainsi par bande génératrice jusqu'à ce que l'énergie disponible devienne insuffisante pour soutenir cette propagation.

Quant à la propagation dans la surface délaminiée, il ressort aussi des travaux expérimentaux de *Takeda & col. (1980, 1981a, 1982)* qu'elle est reliée à la propagation des ondes de flexion.

Il a été en effet observé que le délaminage se propage à une certaine vitesse initiale, laquelle vitesse diminue pendant l'impact pour se stabiliser à une valeur correspondant à peu près à la vitesse de propagation de l'onde de flexion dominante. Les résultats ont aussi montré que la vitesse de propagation du délaminage est peu affectée par cette vitesse et par la masse du projectile.

Les fissures précédant le délaminage se forment également lors de la propagation des ondes de flexion, ce qui laisse entrevoir une certaine interaction fissuration-délaminage.

La conclusion qui se dégage de ces travaux et de ces constatations est que l'onde de flexion peut être le facteur le plus important générant le délaminage, et que sa propagation est en relation étroite avec la propagation du délaminage. Ces deux dernières constatations soutiennent d'ailleurs l'hypothèse émise par *Takeda et col.*, selon laquelle la bande génératrice n'est pas en relation directe avec la propagation du délaminage, mais est plutôt initiatrice du délaminage.

Pour la surface délaminiée, une étude expérimentale menée par *Liu (1988)* montre que son étendue dans une interface augmente avec la différence d'orientation des plis la définissant. C'est en fait la différence de comportement des deux plis qui rend l'interface fragile vis à vis du délaminage. Ceci explique d'ailleurs pourquoi les interfaces entre les plis de même orientation ne subissent pas de délaminage.

Par ailleurs, la surface délaminée a une étendue proportionnelle à la réponse globale en flèche et en pression de contact [*N.Takeda et col. (1980)*]. La réponse globale constitue dans ce sens un moyen de mesure de l'étendue de la surface délaminée.

Enfin, peu de travaux [*H.T.Wu & G.S.Springer (1988)*] ont essayé de définir ou de vérifier un critère de délaminage en dynamique.

III.3. LES LOIS DE CONTACT

Nous nous intéressons ici aux lois qui régissent le contact entre la plaque et le projectile.

La force de contact ainsi que sa distribution sur la surface de contact sont à priori des inconnues du problème, et font partie de la solution à déterminer.

Nous parlerons donc d'abord de la possibilité de dérivation analytique de la relation traduisant le contact.

Nous présenterons ensuite les lois de contact expérimentales de *Yang et Sun (1982)*. Ces lois ont été utilisées dans de nombreuses études récentes.

La considération de la force de contact comme inconnue complique la résolution du problème. Pour simplifier, certains auteurs se sont alors donnés la variation de la force de contact dans le temps ainsi que la distribution de la pression sur la surface de contact. Nous réservons un paragraphe à ces approches simplifiées.

Nous verrons enfin au dernier paragraphe, que la définition précise de la loi de contact n'a pas la même importance, suivant que l'on s'intéresse à la réponse globale ou à la réponse locale de la plaque et que l'on peut se contenter d'une force de contact introduite comme donnée pour le calcul de la réponse globale.

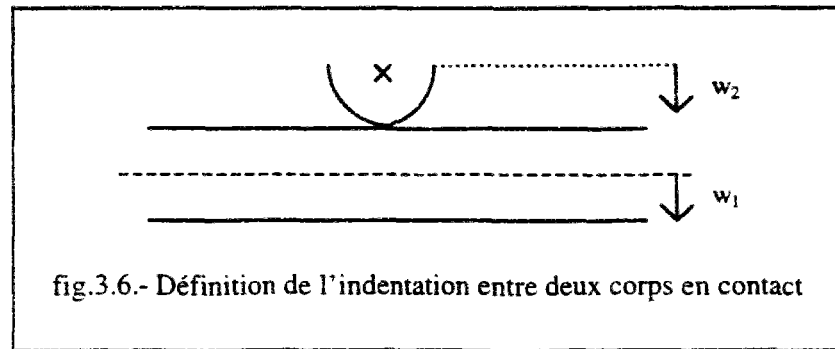
III.3.1. Dérivation analytique de la loi de contact

L'obtention d'une loi de contact expérimentale nécessitant beaucoup de temps et de moyens, des efforts ont été développés pour pouvoir disposer d'une relation analytique traduisant le contact entre un projectile et une plaque multicouche.

La plupart des études ont essayé d'exprimer cette loi à l'aide d'une relation entre la force de contact F et l'indentation α , appelée loi d'indentation.

L'indentation α (parfois notée δ), est le rapprochement entre deux points à contrainte nulle appartenant aux deux corps en contact (fig.3.6):

$$\alpha = w_2 - w_1$$



Quelques travaux [*D.S.Cairns & P.A.Lagace (1987)*, *E.Wu & col. (1994a)*] ont essayé d'obtenir directement des expressions analytiques traduisant cette relation d'indentation; les résultats obtenus n'étaient pas toujours satisfaisants.

Malgré ces efforts, il reste pratiquement admis que la dérivation directe d'une telle relation analytique serait assez exceptionnelle. La plupart des travaux [*H.Y.T.Wu & col. (1989)*, *B.R.Petersen (1985)*, *H.Aggour & C.T.Sun (1988)*, *J.K.Chen & C.T.Sun (1985c)*] utilisent plutôt la loi de Hertz ou une de ses extensions pour traduire le contact.

Etablie à l'origine pour traduire le contact entre deux sphères élastiques isotropes, la loi de Hertz s'exprime par:

$$F = k_c \cdot \alpha^{3/2} \quad (3.1)$$

Beaucoup de chercheurs [*W.E.Goldsmith (1960)*, *J.R.Willis (1966)*, *L.B.Greszczuk (1982)*...] ont par la suite essayé, en modifiant cette expression, de la généraliser aux structures non isotopes. Dans un paragraphe que nous avons laissé en annexe III, nous évoquons quelques uns de ces travaux et les expressions qui s'en sont dégagées.

Il n'en reste pas moins qu'actuellement, on ne dispose pas d'une relation analytique traduisant le contact entre un projectile isotrope et une plaque multicouche.

Yang et Sun (1982) figurent alors parmi ceux qui, en s'inspirant de la loi de Hertz et de ses développements, ont essayé d'établir expérimentalement cette loi de contact.

VI.3.2. Dérivation expérimentale de la loi de contact: Les lois de Yang et Sun

Nous utiliserons largement ces lois dans notre code de calcul.

Ces lois s'inspirent de la loi de Hertz et de ses développements (cf.annexeIII). Elles ont été confirmées par les travaux de *Tan et Sun (1985)*.

Une particularité ces travaux est d'adopter des expressions de lois de contact différentes en phase de chargement (lorsque F est croissante), en phase de décharge (lorsque F est décroissante) et éventuellement en phase de rechargement (lors d'un deuxième contact).

Pour la phase de chargement, la loi de contact s'écrit:

$$F = k_c \cdot \alpha^{3/2} \quad (3.2)$$

avec

$$k_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^{1/2}}{\frac{(1-\nu_s^2)}{E_s} + \frac{1}{E_y}} \quad (3.3)$$

R : la courbure relative définie en fonction des deux rayons par $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$;

E_s, ν_s : module d'Young et coefficient de Poisson du projectile;

E_y : le module transverse de la couche supérieure de la plaque.

La loi de Yang et Sun a été établie à partir de tests menés sur des poutres en graphite/epoxy, encastrées, constituées essentiellement d'empilements [0/45/0/-45/0]_{2s}. Le coefficient de rigidité de contact a été alors déterminé par interpolation à partir de la méthode des moindres carrés.

Cette loi de Hertz modifiée n'est valable que pendant la phase de chargement, c'est à dire jusqu'au moment où la force de contact F atteint son maximum.

Pendant la phase de décharge, des indentations permanentes apparaissent, et la loi de contact en puissance $3/2$ n'est plus valable. Ceci a conduit *Yang et Sun (1982)* à adopter l'expression générale proposée par *Crook (1952)*:

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q$$

F_m et α_m étant la force et l'indentation maximales atteintes pendant le chargement; α_0 l'indentation permanente après décharge.

α_0 et q sont difficiles à mesurer. Ils ont été déterminés par la méthode des moindres carrés. $q=2.5$ semble être une valeur appropriée, mais le coefficient α_0 déterminé avec cette méthode ne correspond pas à la vraie indentation permanente. α_0 dépend en effet du chemin de décharge. Cela signifie que plusieurs tests sont nécessaires, et que la relation liant F_m à α_0 doit être déterminée.

Pour simplifier l'étude en décharge, l'hypothèse que le rapport $S=F_m/(\alpha-\alpha_0)^{5/2}$ restait constant pour les différents chemins de décharge a été émise.

En introduisant la constante $\alpha_{cr}=k_c/S$ ne dépendant que du matériau et de l'impacteur, et en écrivant que $F_m=k_c.\alpha_m^{3/2}$, on a:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = 1 - \left(\frac{\alpha_{cr}}{\alpha_m}\right)^{2/5}$$

avec la condition:

$$\alpha_0=0 \text{ si } \alpha_m < \alpha_{cr}.$$

α_{cr} apparaît alors comme une donnée associée à l'indentation, à partir de laquelle on peut déterminer α_0 .

Pour déterminer α_{cr} , Yang et Sun ont joint les points de chaque courbe de décharge, par une courbe telle que l'énergie de dissipation correspondant au cycle charge/décharge corresponde à celle obtenue expérimentalement. Les résultats obtenus alors sont satisfaisants.

Il est à noter qu'une faible variation dans la valeur de α_{cr} n'a pas d'effet appréciable sur la courbe de décharge.

La valeur de α_{cr} semble être indépendante de la taille de l'impacteur; un seul test en décharge suffit donc pour la déterminer.

En résumé, la loi en décharge s'écrivait:

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q \quad (3.4)$$

F_m et α_m étant la force et l'indentation maximales atteintes pendant la charge; α_0 désignant l'indentation permanente après décharge donnée par:

$$\alpha_0 = S.(\alpha_m - \alpha_{cr}) \quad \text{si } \alpha_m \geq \alpha_{cr}$$

avec

$$S = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^{5/2}}$$

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{si } \alpha_m \leq \alpha_{cr}$$

α_{cr} désigne l'indentation critique;
S est une constante expérimentale;
q est une constante évaluée à environ 2.5.

α_{cr} et S sont des constantes déterminées expérimentalement.

Quelques difficultés techniques ont accompagné la détermination de ces lois par Yang et Sun. Ceci a conduit *Tan et Sun (1985)* à utiliser un transformateur différentiel pour améliorer la précision des résultats. Les résultats obtenus avec l'empilement $[0/45/0/-45/0]_{2s}$ ont été comparés à ceux issus de tests expérimentaux d'impact (vitesse inférieure à 4m/s), ainsi qu'à des résultats issus d'un calcul numérique basé sur la théorie des laminés de *Whitney et Pagano (1970)* et utilisant des éléments finis développés par *S.H.Yang (1981)*. Un bon accord a été trouvé pour les déformations. Le coefficient k_c a pu être déterminé expérimentalement (pour ce niveau de vitesse).

Enfin, lorsque l'impact se traduit par plusieurs phases de contact entre la plaque et le projectile, une phase de recharge peut exister. D'après les travaux de *Yang et Sun (1982)*, la loi en puissance $3/2$ semble convenir:

$$F = k_1 (\alpha - \alpha_0)^{3/2}.$$

Lorsque le niveau de charge n'est pas élevé, la courbe de recharge reprend là où s'est arrêté la courbe de charge. Dans ce cas, on peut déterminer le nouveau coefficient de contact $k_1 = F_m / (\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}$, sans besoin d'aller opérer de nouveaux tests en décharge.

La loi de contact en décharge s'exprime finalement par:

$$F = k_1 (\alpha - \alpha_0)^{3/2} \quad (3.5)$$

avec

$$k_1 = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}}$$

Pour les faibles niveaux de charge, k_1 est pratiquement égal à la rigidité de contact en charge k_c .

Les travaux de Yang et Sun fournissent ainsi des expressions de la loi d'indentation pendant les phases de chargement, de décharge et de rechargement. Certaines des constantes intervenant dans ces expressions doivent cependant être redéterminées à chaque fois que l'on change de structure.

III.3.3. Possibilité de l'introduction de la force de contact comme donnée du problème

Trois problèmes sont sous-jacents à la définition du contact;

- l'évolution dans le temps de la force de contact;
- la forme variable dans le temps de la zone de contact;
- et enfin la répartition de cette force sur la zone de contact.

Plusieurs études ont essayé de se définir à priori la force de contact. Nous en évoquons trois;

● L'étude de *Ramkumar et Chen (1983)* se distingue par l'hypothèse d'une surface de contact variable dans le temps. Ils ont imposé à chaque instant t une distribution de pression uniforme de la forme:

$$\sigma_z(x,y,h/2,t) = -\left(\frac{C_1 \cdot t}{4(at/c)^2}\right) \cdot XYT$$

avec	$X(x,t)=1$	si $ x < at/c$
	0	sinon
	$Y(x,t)=1$	si $ y < at/c$
	0	sinon
	$T(t)=1$	si $t < c$
	0	sinon

C_1 désignant le taux de charge, h l'épaisseur totale et $2a$ la longueur de la base de la surface de contact à $t=c$, instant auquel l'endommagement s'initie.

Avec une telle répartition, l'analyse développée restait valable jusqu'à $t=c$, et servait à prédire le début de l'endommagement.

● *J.D.Lee et H.Liebowitz (1984)*, dans une analyse éléments finis 3D, ont supposé la pression de contact uniformément répartie sur la zone de contact, avec une évolution en triangle dans le temps:

$$f(t) = \begin{cases} p_0 \frac{2t}{\tau} & \text{si } t \leq \frac{\tau}{2} \\ 2p_0(1 - \frac{t}{\tau}) & \text{si } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases}$$

τ étant la période de contact que l'on prend égale à $0.5 \cdot T$.

avec $T = \frac{L}{c}$ et $c = \left(\frac{E_t}{\rho}\right)^{1/2}$ vitesse de l'onde longitudinale.

● *Ross et col. (1985)*, également dans une étude éléments finis 3D, ont supposé la force de contact ponctuelle. Son évolution dans le temps était supposée linéaire (triangulaire) pendant la durée Δt du contact.

A travers ces études, nous voyons que plusieurs répartitions ont été imaginées. L'introduction de la force de contact comme donnée permet alors de calculer efficacement la réponse globale de la plaque (flèche au centre par exemple). Il n'en reste pas moins que le champ de contrainte au niveau local, c'est à dire au niveau de la zone de contact, ne peut être calculé avec précision C'est ce que nous voyons au prochain paragraphe.

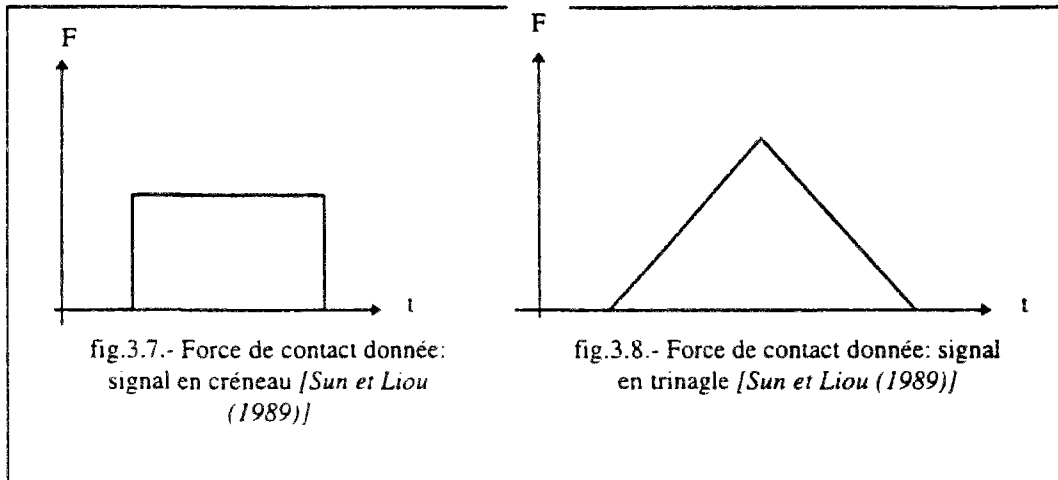
III.3.4. Influence sur la réponse d'une définition précise de la loi de contact

Le but de ce paragraphe est de constater la différence d'importance d'une définition précise de la loi de contact, suivant que l'on s'intéresse au calcul de la réponse globale ou à celui de la réponse locale de la structure.

Pour ce faire, nous partons de l'étude éléments finis comparative menée par *C.T.Sun et W.J.Liou (1989)*.

Pour convertir la vitesse (ou encore la quantité de mouvement) en forces nodales (forces appliquées aux noeuds de la surface de contact), ils ont utilisé deux méthodes:

- une première s'appuie sur l'égalité entre l'impulsion et la quantité de mouvement transmise: $F.t=M.V$. La force ' F ' peut avoir deux répartitions dans le temps; répartition uniforme (fig.3.7.) ou répartition en triangle (fig.3.8.).



- la deuxième méthode, plus précise, s'appuie sur la loi de Hertz et fait intervenir l'indentation de la surface de la plaque par le projectile. La force de contact y est considérée comme une inconnue du problème.

L'étude de *Sun et Liou* a montré que pour ces deux méthodes, la réponse globale de la plaque (flèche au centre) est pratiquement la même. Toutefois, le champ de contrainte, et essentiellement les contraintes interlaminaires, sont affectées par la distribution de la force de contact.

Qian et Swanson (1990) ont montré qu'en fait, plus la plaque est rigide, plus la rigidité de contact est importante dans la réponse.

Récemment, certains travaux [*E.R.Green (1991.a-b)*], en imaginant des projectiles de forme particulière permettant une répartition linéique de la force de contact ont trouvé que la réponse globale dépend peu de la forme de l'impulsion (variation dans le temps).

Tous ces résultats montrent que la définition précise de la loi de contact a peu d'effet sur la réponse globale. Elle peut par contre affecter sévèrement le champ de contraintes local. Elle est donc d'une grande importance si l'on veut étudier l'endommagement de la plaque. La loi d'indentation de type Hertz semble dans ce cas plus indiquée qu'une distribution de force donnée.

Toutefois la théorie de Hertz reste une bonne approximation pour l'impact des plaques, tant que l'indentation reste faible devant l'épaisseur et les dimensions de la surface de contact. Lorsque les indentations deviennent grandes, l'endommagement peut avoir lieu, le ressort d'indentation devenant plus raide, la loi en $3/2$ doit alors être abandonnée [*R.Olsson (1992a), E.Wu & K.Shyu (1993)*].

III.4. LES MODELES MATHEMATIQUES UTILISES

Nous abordons maintenant des modèles plus complexes. Le problème est toujours celui d'une plaque multicouche impactée par un projectile. Plusieurs modèles mathématiques ont été utilisés dans l'objectif de calculer la réponse globale et de la réponse locale (champ de contrainte local) de la plaque.

Nous allons évoquer ici quelques familles de modèles utilisés, en nous contentant des plus importants d'entre eux. L'objectif de ce paragraphe est de pouvoir distinguer le contexte dans lequel se place notre modélisation mathématique, et de préparer le champ aux comparaisons entre les résultats donnés par notre modèle et ceux donnés par d'autres études.

Nous évoquerons les familles de modèles en allant des plus simples au plus complexes.

Nous parlerons d'abord des modèles de type masse-ressort et des bilans énergétiques, puis de l'approche simplifiée par propagation d'onde.

Nous parlerons ensuite des approches analytiques avec des modèles de type poutre ou plaque en partant du cas isotrope et en essayant de généraliser au cas anisotrope.

Dans la dernière famille de modèles, nous réunirons les approches par modes propres et ceux par éléments finis. C'est dans cette dernière famille que l'on peut classer une grande partie des travaux numériques récents, et aussi probablement notre étude numérique.

III.4.1. Les modèles simples de type masse-ressort

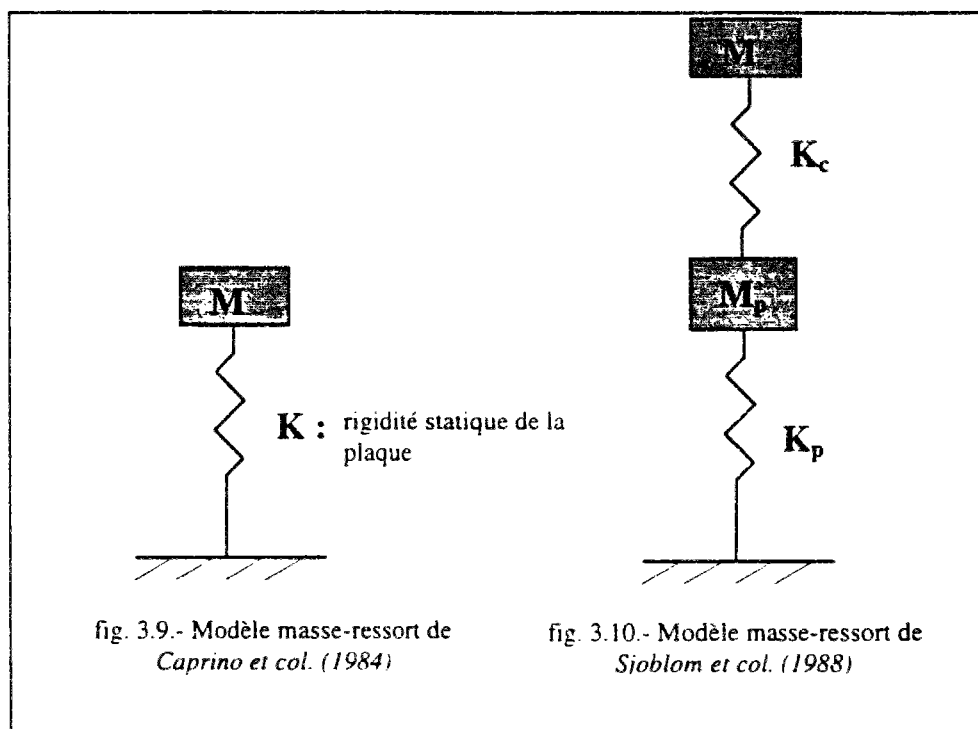
Lorsque la vitesse d'impact est faible et que la durée du contact est longue, des modèles analytiques peuvent représenter le problème par un assemblage de masses et de ressorts, réalisant ainsi un système discret avec seulement quelques degrés de liberté.

Ces modèles sont simples à utiliser, mais ne fournissent que des informations globales sur la réponse. Ils ne permettent pas de calculer le champ de contrainte local.

Plusieurs modèles ont été imaginés. Le nombre de ressorts dépend des effets dont on veut tenir compte (effet de contact, effet de flexion, effet de cisaillement...). Nous allons évoquer quelques uns de ces modèles, en allant des plus simples au plus complexes.

- *Caprino et col. (1984)* ont utilisé un modèle de type masse-ressort à un seul degré de liberté (fig.3.9.), pour modéliser l'impact d'une grande masse en chute libre sur une plaque de faible masse et de petites dimensions.

La durée du contact est dans ce cas très longue et la réponse est quasi-statique. Un très bon accord a été trouvé avec les résultats expérimentaux.



- *Sjoblom et col. (1988)* ont suggéré un modèle à deux ddl (deux masses) et deux ressorts (fig.3.10.).

Le coefficient k_p désigne la rigidité de la plaque. La rigidité de contact est représentée par un ressort non-linéaire k_c .

- Avec deux ddl également, *Lal (1983)* a présenté un modèle à trois ressorts k_p , k_i et k_s représentant respectivement la rigidité de flexion et d'effet membranaire, la rigidité de contact de type Hertz, et la rigidité de cisaillement (fig.3.11.).

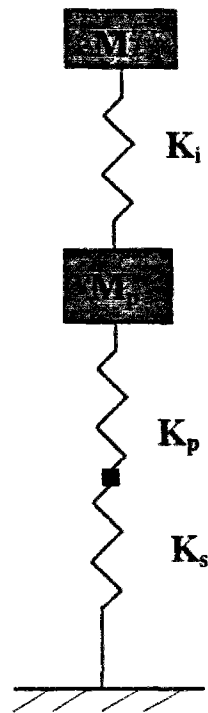


fig.3.11. Modèle masse-ressort de Lal (1983)

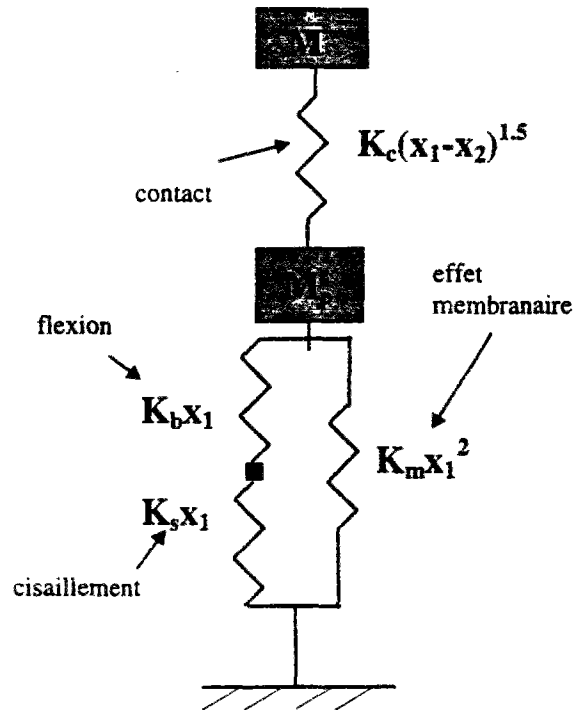


fig.3.12.- Modèle masse-ressort de Shivakumar & col. (1985)

Les modèles simples de type masse-ressort peuvent ainsi être utilisés. Par intégration des équations de mouvement obtenues, les variations dans le temps de la force de contact et des déplacements peuvent être déterminées.

Dans le cas d'une réponse quasi-statique, les déplacements du projectile et de la plaque sont en phase. Ils atteignent leur maximum en même temps. Dans ce cas, il est possible de déterminer directement la durée de contact ainsi que le maximum de la force de contact, en écrivant un bilan énergétique traduisant l'égalité entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

Quand la force de contact atteint son maximum, l'énergie cinétique du projectile est nulle. L'énergie cinétique initiale aura alors été utilisée pour déformer globalement la plaque et pour y produire localement des déformations liées directement au contact.

Les deux énergies correspondant à ces deux déformations peuvent être exprimées en fonction du maximum de force de contact, qui peut lui même être relié à la vitesse initiale du projectile par l'écriture d'un bilan énergétique.

C'est ainsi que plusieurs modèles à bilans énergétiques ont été utilisés [K.N.Shivakumar & col. (1985), A.P.Christoforou & col. (1991), T.A.Guy & col. (1992), C.B.Prasad & col. (1993)...].

Le modèle énergétique le plus complet a été présenté par *Shivakumar et col. (1985)*, pour l'étude de l'impact sur plaques multicouches circulaires. Il a utilisé pour cela un modèle à deux ddl et quatre ressorts, tenant compte ainsi des effets de flexion, de cisaillement, de contact, et de l'effet membranaire (lié aux déformations membranaires) (fig.3.12.). M_p désigne la masse effective de la plaque (égale au quart de sa masse totale). Le terme membranaire non linéaire peut être négligé tant que les déplacements ne sont pas importants. Pour des déplacements de faible amplitude, k_m peut être supposé nul.

Le modèle proposé par *Bucinell et col. (1991)* se rapproche du modèle de Shivakumar. La rigidité de contact non linéaire est remplacée par un ressort linéaire équivalent. Avec ce modèle, ils ont pu établir que lorsque la réponse est quasi-statique, la vitesse d'impact affecte uniquement l'amplitude de la réponse, alors que la durée de contact reste constante. Nous verrons au paragraphe (VI.1.1.), que même en isotropie cette conclusion manque de précision.

III.4.2. Les approches par propagation d'ondes

Nous avons classé ces approches dans la gamme des modèles simples.

Les vibrations transverses produites par l'impact d'une plaque multicouche, peuvent être étudiées en terme de mouvement d'onde de flexion.

Les ondes de flexion constituent le meilleur moyen pour pouvoir interpréter le mouvement transitoire de la plaque. Nous verrons néanmoins qu'elles restent difficiles à analyser du fait qu'elles se propagent tout en changeant de vitesse et de forme.

Partons du milieu isotrope élastique infini. Seuls deux types d'ondes se propagent:

- une onde de dilatation avec une célérité $\sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$;
- une onde à volume constant dite onde de cisaillement. Sa célérité est $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

Dans un milieu plaque (non infini), des ondes de flexion naissent. Elles sont plus lentes et engendrent des contraintes plus élevées que dans le cas d'ondes de dilatation ou de cisaillement [B.S.Kim & F.C.Moon (1979)].

Par leur simplicité relative, les théories de poutre constituent un moyen d'investigation du problème des ondes dans une plaque. En effet, les poutres

n'étant que des plaques élancées, les ondes y sont similaires à celles dans les plaques.

Dans une poutre mince, les ondes de dilatation sont gouvernées par l'équation:

$$E \cdot u_{,xx} = \rho \cdot u_{,tt}$$

ce qui décrit deux ondes se propageant à directions opposées, avec une forme constante et une célérité $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernouilli, les ondes de flexion dans une poutre sont gouvernées par une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre:

$$w_{,tt} = -\frac{EI}{\rho A} \cdot w_{,xxxx}$$

Cette équation n'admet pas de solution d'onde se propageant à forme et à vitesse constantes.

Pour une plaque, deux ondes élastiques existent: une longitudinale et une de flexion.

L'onde longitudinale est similaire à l'onde de dilatation que nous avons évoquée pour les poutres. Si la plaque est isotrope élastique infinie et mince, la vitesse de cette onde est $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$. Cette vitesse diffère de celle dans une poutre uniquement par le facteur $1-\nu^2$.

Pour une plaque multicouche, l'onde de flexion est généralement prédominante, mais d'autres ondes se propagent également, ce qui rend l'étude difficile.

Cela explique peut être pourquoi les études expérimentales sont peu nombreuses [N.Takeda & col. (1981a), P.C.Chou & col. (1975), I.M.Daniel & col. (1976, 1979)]. Malgré cela, et comme mentionné par Takeda et col. (1980), de nombreuses analyses théoriques de la propagation d'ondes ont été entreprises pour étudier un composite laminé impacté transversalement [T.S.Chow (1971), C.T.Sun & col. (1974), F.C.Moon (1972, 1973.a-b-c), B.S.Kim & col. (1977, 1979), J.T.Kubo & col. (1975), R. Olsson (1994)...].

La théorie de plaque laminée [P.C.Yang & col. (1966)], associée à l'introduction des déformations de cisaillement transverse et des inerties de rotation proposée par J.M.Witney et N.J.Pagano (1970), a été utilisée pour résoudre quelques cas de conditions aux limites.

En comparant les résultats théoriques à des résultats de mesures expérimentales, *Chou et Rodini (1975)* ont démontré la fiabilité de cette théorie des plaques laminées pour étudier les problèmes de propagation d'ondes.

Les résultats donnés par cette théorie dans le cas d'un seul pli ont été comparés par *Sun et Lai (1974)* à une solution 2D élastique orthotrope. Pour les deux approches, ils ont utilisé la transformation de Laplace dans le temps, et celle de Fourier dans l'espace. Le bon accord trouvé alors entre les résultats des deux approches a indiqué que cette théorie de plaque de *P.C.Yang & col. (1966)* est suffisante pour l'étude des ondes dans les problèmes d'impact.

Moon (1972) a utilisé une version modifiée de la théorie de plaque de Mindlin, pour étudier les ondes de contraintes dans un seul pli orthotrope. La forme des fronts d'onde ainsi que la vitesse des ondes longitudinale et de flexion ont été ainsi déterminées pour un certain nombre de plis.

Après cette étude par front d'ondes, *Moon (1973.a-c)* a utilisé la théorie de plaque de Mindlin pour effectuer des calculs d'ondes dans les plaques anisotropes, soumises à une force transverse concentrée. La transformation de Laplace dans le temps, et la double transformation de Fourier dans l'espace ont été utilisées. La pression de contact avait une évolution sinusoïdale dans le temps.

A partir d'une étude 2D, basée sur la théorie des modules effectifs et la théorie de plaque de Mindlin, *Moon (1973.b-c)* a mis en évidence l'existence de 5 ondes de contraintes; deux de contraintes planes et trois de flexion. Ces ondes ont été observées expérimentalement par *Daniel et col. (1979)*.

Avec la même approche, *Kim et Moon (1979)* ont modélisé chaque pli comme une plaque de Mindlin. La distribution de la pression de contact prenait l'expression :

$$q = -p_0/4 \cdot [1 - \cos(2\pi t/t_0)] \cdot [1 + \cos(\pi x/a)]$$

Grâce à la transformation de Laplace dans le temps et celle de Fourier dans l'espace, ils ont pu ainsi étudier la propagation des ondes à travers l'épaisseur du laminé.

Kubo et Nelson (1975) ont présenté une étude analytique en contraintes planes. La technique qu'ils ont utilisée fournissait des informations sur les longueurs des ondes longues et courtes, à la fois en basse et haute fréquence.

L'ensemble de ces études par propagation d'ondes fournit des informations quant aux ondes se propageant dans la plaque impactée. Mais le caractère simplifié de ces études et les difficultés qui se rattachent à la non constance de la vitesse des ondes et de leur forme, font que ces informations restent imprécises. De plus, ces approches ne tenant pas compte de l'effet du contact, sont incapables de calculer la réponse locale.

III.4.3. Modèles analytiques de type poutre ou plaque

Dans l'idéal, on aimerait pouvoir disposer d'une démarche pour déterminer une solution analytique simple du problème d'une structure composite multicouche soumise à l'impact.

Nous allons d'abord voir qu'une telle démarche existe (pour des conditions aux limites simples) dans le cas des poutres et des plaques isotropes. Elle permet de calculer la réponse globale de la structure.

Nous parlerons ensuite de certaines études qui ont essayé d'étendre cette démarche au cas anisotrope.

a) Cas des poutres isotropes

L'approche de base de l'impact d'une sphère élastique isotrope sur une poutre élastique homogène isotrope est due à *Timoshenko (1913)*. Son extension aux poutres composites a été entreprise par *McQuillen et col. (1976)*. Cette approche a été présentée en détail par *Goldsmith (1960)*:

L'équation du mouvement de la sphère de masse m_2 s'écrit:

$$m_2 \cdot w_{2,tt} + F(t) = 0$$

Par double intégration cela donne:

$$w_2(t) = V_0 \cdot t - \frac{1}{m_2} \int_0^t \int_0^\tau F(\tau) d\tau d\tau$$

(V_0 étant la vitesse initiale du projectile)

L'inflexion w_1 de la poutre est régie par l'équation d'Euler-Bernouilli

$$E \cdot I \cdot w_{1,xxxx} + \rho \cdot A \cdot w_{1,tt} = F(t) \cdot \delta(x-c)$$

où $x=c$ désigne le point de contact

$F(t)$ la force de contact entre la sphère et la poutre appliquée en $x=c$

I le moment d'inertie

A l'aire de la section de la poutre

δ la fonction Dirac ($\delta(0) = 1$ et $\delta(u) = 0$ si $u \neq 0$)

A partir de la procédure d'analyse modale (cf. III.4.4.), on peut déterminer les modes propres normaux Φ_i de la poutre, ainsi que ses pulsations propres ω_i . Ceci permet d'écrire pour une longueur L de poutre:

$$w_1(c,t) = \frac{1}{\rho \cdot A} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{[\Phi_i(c)]^2}{\omega_i \int_0^L \Phi_i^2 dx} \right) \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_i(t-\tau) \cdot d\tau$$

Le contact de type Hertz est régie par l'équation $F=k_c.(w_2-w_1)^{3/2}$. En y remplaçant w_1 et w_2 par leurs expressions précédentes, on obtient alors une équation intégrale définissant la force de contact F .

Cette équation peut être résolue numériquement. La résolution n'est cependant effectivement possible que pour certains types de conditions aux limites (appuis simples).

b) Cas des plaques isotropes

Cette approche de Timoshenko a été étendue par *Karas (1939)* au cas d'une plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée.

Le déplacement w_1 de la plaque au point (x_0, y_0) d'application de la charge est alors donné par:

$$w_1(t) = \frac{1}{2b\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_{ij}^2}{\omega_{ij} \int_S \Phi_{ij}^2 dx dy} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_{ik} (t - \tau) \cdot d\tau$$

où Φ_{ij} et ω_{ij} désignent respectivement les modes propres normaux et les pulsations propres de la plaque.

Nous aurons l'occasion d'utiliser cette expression lors de la validation du code éléments finis au chapitre V.

c) Cas des plaques multicouches

Pour étendre ces approches au cas de l'impact des composites laminés, plusieurs difficultés existent:

- *Whitney et Pagano (1970)* ont montré que l'influence des déformations de cisaillement dans les composites laminés peut être importante. Les modèles Love-Kirchhoff, ne tenant pas compte des déformations de cisaillement, présentent une rigidité non réaliste. Dans les problèmes d'impact, où la charge est essentiellement ponctuelle, ces erreurs peuvent être sévères;
- un couplage existe entre le cisaillement et la flexion;
- le couplage flexion-torsion au niveau du comportement, fait qu'une simple superposition des modes orthogonaux n'est pas valide.

Une théorie de plaque due à *Whitney et Pagano (1970)* tient compte des déformations de cisaillement. Les normales aux surfaces moyennes sont supposées rester droites et pouvoir tourner indépendamment du déplacement transverse de la plaque. Cette théorie a été utilisée par bon nombre d'auteurs [*C.T.Sun & Chattopadhyay (1975)*, *Y.Qian & S.R.Swanson (1990)*, *P.C.Chou & col. (1975)*...];

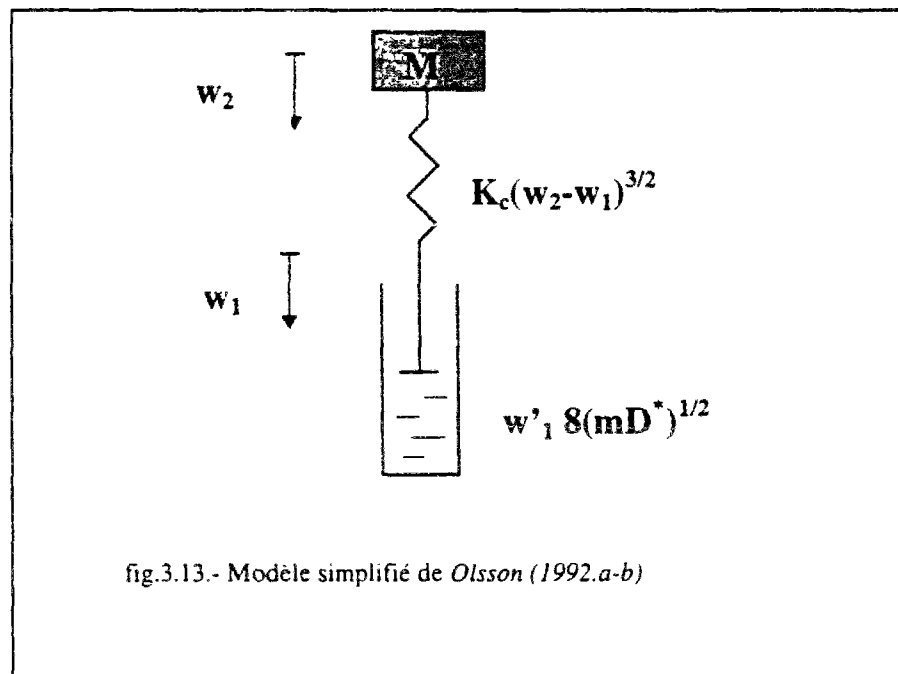
Sun et Chattopadhyay (1975) l'ont utilisée pour étendre l'approche à l'analyse des plaques composites laminées simplement appuyées et soumises à des contraintes initiales.

Le cas d'une charge répartie sur une petite surface a été étudié par *Dobyns et Porter (1981)*.

Qian et Swanson (1990) ont utilisé la même approche pour étudier une plaque laminée rectangulaire encastree le long de ses quatre bords. Dans ce cas, les modes propres peuvent être obtenus avec exactitude à partir d'une analyse de type Rayleigh-Ritz. Un excellent accord a été enregistré avec des résultats expérimentaux.

Notons enfin qu'en négligeant certains des aspects du problème, des approches analytiques simplifiées peuvent être entreprises dans le cas anisotrope.

C'est ainsi qu'*Olsson (1992b)* a essayé de proposer une solution analytique simple pour la première phase de l'impact, avant que les ondes de flexion ne se réfléchissent. L'étude était basée sur la théorie de plaque de Kirchhoff. En négligeant le cisaillement et en supposant que les indentations restent beaucoup plus petites que les dimensions de la zone de contact et l'épaisseur de la plaque, il a essayé de généraliser aux plaques composites l'approche de *Zener (1941)*, utilisée à l'origine pour des plaques isotropes à cisaillement négligeable. Le modèle masse-ressort correspondant était alors [*R.Olsson (1992a)*]:



avec D^* la rigidité en flexion effective de la plaque reliée aux coefficients de la matrice de rigidité.

Le problème était alors régi par une équation différentielle non-linéaire à un paramètre λ (paramètre d'inélasticité) [R.Olsson (1992b)]. Des vérifications expérimentales de cette approche menées sur des empilements [45/0/-45]_{ns} motrent un bon accord [R.Olsson (1990,1991b)].

d) Conclusion

De telles approches analytiques, bien que restreintes à des cas assez particuliers, peuvent apporter des renseignements utiles sur le phénomène d'impact et améliorer la compréhension des facteurs qui affectent la réponse. Elles peuvent être utiles pour la planification d'une étude expérimentale ou numérique. Mais pour résoudre les cas usuels de problèmes d'impact sur plaques ou poutres composites, les difficultés énumérées ci-dessus limitent l'utilisation de solutions analytiques. Il est alors nécessaire de définir des modèles mathématiques tenant compte de ces phénomènes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

III.4.4. Les modèles numériques d'élasticité 2D et 3D

Lorsque la vitesse d'impact est élevée ou lorsque l'on a besoin de connaître de façon précise le champ de contrainte au voisinage de la zone de contact, les modèles de poutre et de plaque deviennent insuffisants. Des modèles élastiques bidimensionnels et tridimensionnels peuvent alors être utilisés.

Les techniques employées sont variées: la méthode de transformation intégrale [M.R.Karim (1991)], la technique des multiplicateurs de Lagrange [A.E.Bogdanovich (1991)]..., mais la majeure partie des travaux utilisent la technique des éléments finis [J.D.Lee & col. (1984), B.V.Sankar & C.T.Sun (1985), J.K.Chen & C.T.Sun (1985.a-b), B.R.Petersen (1985), C.A.Ross & col. (1985), W.E.Bachrach & col. (1988), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989), H.Y.T.Wu & F.K.Chang (1989..)].

La décomposition de la structure en éléments finis conduit, via une formulation variationnelle, à une équation globale du problème du type $M\ddot{U} + KU = F$ (cf.I.3.2).

Cette équation représente un système d'équations linéaires du second ordre à coefficients constants. Elle peut en principe être résolue par les méthodes standards de résolution de tels systèmes. Cependant, dans les cas usuels de calcul éléments finis de structures composites soumises à l'impact, la taille d'un tel système peut atteindre quelques centaines, voir quelques milliers de ddl. Ce qui limite les moyens de résolution efficace d'un tel système à seulement quelques méthodes. Suivant la méthode de résolution utilisée, nous pouvons classer ces modélisations éléments finis en deux groupes: celles utilisant une méthode d'intégration directe et celles utilisant une méthode d'intégration *indirecte* [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

a) Les modélisations à méthode directe

Elles subdivisent l'intervalle d'étude en pas de temps Δt et se ramènent de la résolution d'un système non stationnaire, à celle d'un système stationnaire dans chaque intervalle de temps.

L'équation $M\ddot{U} + KU = F$ est écrite en des points discrets de l'intervalle d'étude, en considérant l'accélération comme un effort d'inertie. Les dérivées \dot{U} et \ddot{U} sont approximés à l'aide de schémas de type différences finis.

Ces schémas sont nombreux, mais pour des raisons d'efficacité et de précision, seuls quelques uns sont utilisés en pratique (différences centrales, Newmark...).

b) Les modélisations à méthode indirecte

Grâce à un changement de base de la forme $U = P.X$, on transforme d'abord l'équation $M\ddot{U} + KU = F$ avant de l'intégrer.

Ceci revient, par un choix judicieux de la matrice P , à effectuer une décomposition modale $U(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$ et à se ramener à la résolution d'un système d'équations découplées à un seul ddl:

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \phi_i^T F(t) \quad \text{pour } i=1 \dots N \text{ (nombre total de ddl)}$$

Φ_i et ω_i désignent respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres du système, vérifiant $K\Phi_i = \omega_i^2 M\Phi_i$. Les valeurs des coefficients Φ_i dépendent des conditions aux limites imposées.

Les équations découplées peuvent ensuite être résolues par une des méthodes numériques tel que l'intégrale de Duhamel ou encore l'un des schémas d'intégration numérique directe (Newmark, différences centrales...).

Plusieurs travaux ont ainsi utilisé cette méthode indirecte pour effectuer une approche par modes propres du problème d'impact. Nous en citons quelques uns au prochain paragraphe.

Bien qu'apparaissant différentes, les méthodes directes et indirectes peuvent être considérées comme équivalentes: si l'on adopte le même schéma d'intégration numérique pour les deux méthodes, le résultat sera identique, obtenu avec la même précision et entaché des mêmes erreurs numériques. En fait, le choix entre les deux méthodes est essentiellement guidé par des considérations d'efficacité numérique [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

Lorsque le nombre N de ddl à prendre en compte est élevé, on peut procéder à une troncature, en éliminant les modes dont la contribution est négligeable (cf.V.1.2).

c) Les approches par modes propres

Ces approches peuvent ou non utiliser la technique des éléments finis.

- *Sun et Chattopadhyay (1975)* ont étudié une plaque [0/90/0] simplement appuyée en imposant des contraintes initiales.

En suivant la démarche proposée par *Timoshenko (1913)*, ils ont d'abord calculé les fréquences propres de la structure à partir des équations de plaque développées par *Whitney et Pagano (1970)*, dans lesquelles ils ont introduit l'hypothèse de contraintes initiales.

La contribution des rotations d'inertie a été négligée. Pour le contact, ils ont supposé une loi de type Hertz. La force de contact était donnée par une équation intégrale non-linéaire, résolue numériquement en subdivisant l'intervalle d'étude en petits pas de temps.

Des courbes d'évolution de la force de contact et des contraintes ont été tracées. Pour obtenir une convergence satisfaisante, beaucoup de modes propres ont dû être intégrés.

- A partir de la théorie de Reissner-Mindlin incluant le cisaillement, *Cairns et Lagace (1989)* ont utilisé la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz pour la discrétisation dans l'espace. Ils ont alors étudié une plaque [0/90/0/90/0], simplement appuyée.

Les équations résultantes ont été intégrées dans le temps à l'aide de la méthode de Newmark. Le contact était supposé de type Hertz.

La non prise en compte des déformations permanentes en décharge a engendré une surestimation de la force de contact lors du second contact.

- *Qian et Swanson (1990)* ont comparé la précision de deux techniques utilisant les modes propres:

- la première technique utilise une approche analytique basée sur la transformation de Laplace. Au moyen d'expansions en double série de Fourier, elle commence par exprimer les déplacements et les rotations d'une plaque en appuis simples, en fonction des variables d'espace. Les expressions obtenues sont ensuite introduites dans les équations différentielles du problème, qui se traduit alors par une équation différentielle ordinaire du second ordre en temps, la variable étant l'inflexion.

Le contact est linéarisé, en supposant l'existence d'un ressort linéaire entre le projectile et le centre de la plaque. La surface de contact est supposée constante.

La transformée de Laplace de la force de contact présente une expression dont les pôles ω_i (racines du dénominateur de la transformée de Laplace de F) sont les fréquences de la réponse: $F(t) = \sum_i F_j \cdot \sin \omega_j t$.

Le déplacement de la plaque peut ensuite être obtenu à partir de la force de contact.

La méthode peut offrir des solutions exactes, mais est restreinte à des conditions aux limites en appuis simples.

- la deuxième technique repose sur une approche de type Rayleigh-Ritz. Elle se base sur l'hypothèse que le déplacement de la plaque peut être représenté par une série de produits de '*fonctions poutre*' et de '*modes normaux*' (qui sont les solutions du problème de vibrations propres de poutres sous des conditions aux limites appropriées). La méthode est générale du point de vue des conditions aux limites.

Les énergies cinétique et potentielle sont alors calculées à partir des équations de la plaque et introduites dans l'équation du mouvement de Lagrange. La résolution dans le temps se fait ensuite par intégration numérique de type Newmark.

A cause du contact non linéaire, les calculs sont effectués en deux temps, afin d'augmenter la précision. Dans un premier temps, on suppose la force ponctuelle. La force déterminée est ensuite répartie, dans un deuxième temps, sur une aire carrée, avec indentation. Une nouvelle résolution est ensuite effectuée.

Pour les deux techniques, une loi d'indentation de type Hertz a été utilisée avec un coefficient de rigidité de contact $k=8.394 \cdot 10^8 \text{ N/m}^{3/2}$.

Des comparaisons entre les deux méthodes ont été réalisées sur un empilement [0/90/0/90/0], pour des épaisseurs totales h , $2h$ et $4h$ de la plaque.

Les résultats obtenus ont aussi été comparés à des solutions éléments finis et à des résultats expérimentaux.

La comparaison a montré la nécessité, pour chacune des deux méthodes, d'intégrer un grand nombre de modes, afin d'obtenir la convergence. Il faut environ 100×100 modes pour des conditions aux limites en appuis simples.

L'étude a aussi montré que la surface de contact est d'une importance capitale quant à la précision de la solution. Elle a cependant indiqué que, sous certaines conditions, définir dans le détail le contact non linéaire, ne donne pas un effet marquant dans la réponse globale de la structure.

Pour des cas plus complexes (vitesse plus grande), d'autres méthodes sont utilisées. La réponse dans ce cas peut être très localisée. L'analyse modale, incluant alors trop de modes, peut s'avérer difficile, et une approche par propagation d'onde peut même devenir plus efficace.

d) Le calcul éléments finis par intégration directe

Les travaux sont très nombreux. Nous allons citer ceux qui nous ont été les plus utiles dans les choix que nous avons fait. Nous préparons ainsi le terrain aux comparaisons des résultats ultérieurement (chap.VII).

** Analyses éléments finis 2D*

Les modélisations éléments finis basées sur l'élasticité 2D sont nombreuses [B.V.Sankar & C.T.Sun (1985), J.K.Chen & C.T.Sun (1985.a-b-c), H.Aggour & C.T.Sun (1988), H.J.Lin & col. (1990.a-b), D.A.Trowbridge & col. (1991)...].

- A base d'éléments rectangulaires à 4 noeuds et 4 ddl par noeud, Sankar et Sun (1985) ont développé un algorithme numérique pour poutres, en supposant le contact purement élastique.

- Chen et Sun (1985.a-b) ont étudié la réponse à l'impact de laminés, à partir d'un modèle d'éléments finis à 9 noeuds. L'étude était basée sur la théorie de plaque de Mindlin, sur les hypothèses de grandes déformations de Von Karman et sur les lois de contact de Yang et Sun.

- Chen et Sun (1985c) ont utilisé la théorie de Mindlin avec flexion et cisaillement transverse, et développé un modèle d'éléments finis quadrilatéraux à 9 noeuds. Ils ont alors calculé la force de contact, l'inflexion et les déformations d'une plaque soumise à un champ de contraintes initial. L'intégration numérique a été effectuée à l'aide du schéma de Newmark.

- Aggour et Sun (1988) ont utilisé la théorie de Yang-Norris-Stavsky (théorie de cisaillement au premier ordre), avec déformations de cisaillement et rotations d'inertie, pour développer une méthode à éléments finis quadrilatéraux à 8 noeuds et 3 ddl par noeud (w, ψ_x, ψ_y). L'empilement étudié était un [0/90/0]. 13 éléments ont suffi pour mailler le quart de la plaque. La force de contact a été calculée à chaque pas de temps, et répartie uniformément, selon la loi de Hertz (en puissance $3/2$) sans tenir compte des déformations permanentes. L'intégration numérique a été effectuée par la méthode de Newmark, avec un pas de temps $\Delta t=5\mu s$.

** Analyses éléments finis 3D*

Elles sont moins nombreuses que les modélisations éléments finis basées sur l'élasticité 2D. Elles ont pour la plupart essayé de calculer les contraintes transverses au niveau de la zone de contact [J.D.Lee & col. (1984), B.R.Petersen (1985), C.T.Sun & W.J.Liou (1989), S.R.Finn & G.S.Springer (1993), W.Shen & col. (1992)...]. Certains [W.E.Bachrach & col. (1988)] ont essayé de calculer la réponse de structures coques.

- Lee et Liebowitz (1984) ont utilisé des éléments finis 3D à 8 noeuds pour étudier un empilement [0/90] constituant une plaque encastree. Un total de 2500 éléments était nécessaire. La pression de contact était supposée donnée (cf.III.3.1.).

● *Ross et col. (1985)* ont utilisé une méthode éléments finis 3D classique. Avec des éléments à 8 noeuds et 3 ddl par noeud, ils ont étudié un empilement [0₅/90₅/0₅]. A raison de trois mailles dans l'épaisseur, le maillage est simple et les mailles ont des surfaces variant dans un rapport de 1 à 4.

La force de contact est supposée ponctuelle. Le quart de sa valeur est appliqué au noeud d'impact. Sa répartition dans le temps est supposée linéaire (triangulaire) (cf.III.3.1.).

Les valeurs des contraintes sont calculées au centre de chaque élément et aux centres de ses différentes facettes. Sur chacune des deux interfaces 0/90, les contraintes interlaminaires sont obtenues par une moyenne entre les valeurs aux centres de la facette inférieure de l'élément supérieure et de la facette supérieure de l'élément inférieur.

Des courbes ont été tracées pour traduire la variation dans le temps de τ_{xz} et τ_{yz} , en différents points le long des axes de symétrie. Une courbe a été tracée pour la variation le long de l'axe X de τ_{xz} à l'interface supérieure. Cependant les résultats ne fournissent que des moyennes dans l'épaisseur des contraintes transverses.

● Avec un modèle à éléments cubiques à 9 noeuds, *Wu et Chang (1989)* ont pu mener une analyse 3D. Ils ont déterminé les contraintes hors plan à travers l'épaisseur, dans l'optique d'étudier et prédire l'endommagement. Ils ont utilisé la loi de contact de *Tan et Sun (1985)*, et pour chaque pas de temps, la force de contact a été déterminée par un calcul itératif (méthode de Newton-Raphson). Pour améliorer la précision et minimiser le temps de calcul, des modes dits incompatibles ont été introduits.

● *Sun et Liou (1989)* ont proposé une méthode éléments finis 3D hybride, à formulation en contraintes, pour calculer la réponse à l'impact d'un projectile en métal sur une plaque composite. L'étude se proposait de calculer les contraintes interlaminaires.

III.5. CONCLUSION

Les études que nous avons présentées sont analytiques, expérimentales ou numériques.

Les études analytiques introduisent des hypothèses simplificatrices en négligeant certains des phénomènes présents. Ces approches renseignent sur le phénomène d'impact et améliorent ainsi la compréhension de son mécanisme. Ceci est important pour la planification d'une étude expérimentale ou numérique. Elles permettent aussi de quantifier l'effet sur la réponse de certains des paramètres (masse, vitesse, dimensions, conditions aux limites...).

Pour les études expérimentales, nous insistons sur le manque de résultats disponibles. La rareté des tests standards fait que les résultats existant dans la littérature sont difficilement comparables.

Pour les impacts lents ou quasi-statiques, les modèles analytiques peuvent être assez efficaces. Nous avons même rapporté la possibilité, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, d'adopter un modèle analytique dans le cas où la réponse est gouvernée par les ondes de flexion.

Pour les cas pratiques usuels, les études sont plutôt numériques:

Les calculs par modes propres perdent de leur efficacité dès qu'il devient nécessaire d'intégrer un grand nombre de modes dans le calcul de la réponse, cas par exemple des impacts relativement rapides.

L'alternative consiste en un calcul direct par éléments finis. Là encore des théories de plaque sont souvent utilisées. Mais, bien que simples à mettre en oeuvre, elles ne calculent généralement pas correctement les contraintes de cisaillement transverse, importantes pour l'étude du délaminage et de l'endommagement.

Enfin, les études utilisant les éléments finis et s'appuyant sur l'élasticité tridimensionnelle sont très coûteuses, et par conséquent limitées au point de vue nombre de couches et type d'empilement. Cela explique un peu leur nombre réduit.

A travers cette analyse, nous pensons que le modèle à éléments finis que nous développons est plutôt destiné à traiter ce type d'impact, là où la valeur élevée de la vitesse empêche d'utiliser efficacement des modèles analytiques, et là où les modèles plaque sont inefficaces pour renseigner sur l'endommagement et le délaminage. La définition bidimensionnelle de la géométrie de la structure devrait permettre de procéder à des calculs beaucoup moins longs que les calculs éléments finis tridimensionnels.

Quand au contact, son importance est capitale pour la détermination du champ de contraintes local, surtout pour les impacts relativement rapides. L'introduction de la force de contact comme donnée du problème peut permettre un calcul simple et correct de la réponse globale (inflexion de la plaque). Mais si nous voulons construire un modèle capable de fournir des informations fiables sur l'endommagement et le délaminage, nous devons d'abord considérer la force de contact comme une inconnue du problème, et nous devons ensuite définir la loi de contact de façon précise.

Dans les chapitres à venir, nous ferons constamment référence aux résultats de cette synthèse bibliographique. Ces résultats serviront d'une part à faire les choix nécessaires lors de la construction numérique de notre modèle; c'est l'objet du prochain chapitre, et d'autre part à préparer le champ à la validation et aux multiples calculs auxquels nous allons procéder pour mettre en évidence la

pertinence de notre modélisation; ce qui fera l'objet du dernier chapitre de ce travail.

Le chapitre intermédiaire est consacré à la validation du code éléments finis que nous allons développer.

IV. RESOLUTION THEORIQUE DE L'ÉQUATION ÉLÉMENTS FINIS $M\ddot{U}+KU=F$

L'objectif de ce chapitre est de présenter le cheminement théorique que nous allons suivre pour obtenir la solution numérique de l'équation éléments finis (1.66), ainsi que les choix que nous serons amenés à faire.

Nous aurons d'abord à choisir le type de méthode -directe ou indirecte- susceptible de résoudre le plus efficacement l'équation $M.\ddot{U}+K.U=F$. Ces deux types de méthodes ont été évoqués au chapitre précédent. Nous allons ici en présenter quelques détails pour pouvoir effectuer ce choix.

Nous parlerons ensuite des schémas de discrétisation dans le temps pour cette équation, ainsi que de leurs principales caractéristiques, le but étant de dégager un certain nombre de critères permettant de choisir adéquatement un schéma particulier.

Nous évoquerons ensuite succinctement la possibilité d'adopter une structure diagonale pour la matrice masse, avec l'intérêt que cela pourrait présenter pour la résolution de l'équation $M.\ddot{U}+K.U=F$.

Le paragraphe suivant dressera les bases théoriques pour la détermination de la solution d'un problème d'impact, lorsque l'équation $M.\ddot{U}+K.U=F$ est couplée avec les équations traduisant la prise en compte du contact.

Le dernier paragraphe présentera enfin succinctement la partie dynamique de l'algorithme de résolution que nous allons adopter.

IV.1. CHOIX DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION

Considérons l'équation éléments finis (1.66) du modèle M4 en dynamique:

$$M.\ddot{U}+K.U=F$$

Cette équation représente un système d'équations linéaires du second ordre à coefficients constants, qui peut en principe être résolu par des méthodes standards de résolution. Cependant, dans les cas usuels de calcul de structures composites par éléments finis le nombre de ddl pouvant être très grand, la résolution par de telles méthodes est souvent lourde et coûteuse.

Cela fait qu'en pratique, seules quelques méthodes sont capables de résoudre efficacement cette équation. Elles sont de deux types: les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Nous avons déjà évoqué succinctement ces deux types de méthodes, et nous avons rapporté qu'elles étaient pratiquement équivalentes en précision et erreurs numériques (cf. §III.4.4). Nous allons ici les présenter avec un peu plus de détails, en mettant en évidence certains aspects qui nous permettront de faire le choix entre les deux.

IV.1.1. Les méthodes directes

Le mot '*directe*' fait référence au fait qu'avant l'intégration numérique aucune transformation n'est appliquée à l'équation $M\ddot{U}+KU=F$.

Les méthodes directes essayent de se ramener de la résolution d'un système non stationnaire $M\ddot{U}+KU=F$, à celle d'un système d'équations stationnaires dans chaque intervalle de temps. Pour cela, l'intervalle de temps est subdivisé en un nombre fini de pas de temps égaux, et des schémas d'approximation des dérivées première et seconde de type différences finies sont utilisés pour discrétiser l'équation $M\ddot{U}+KU=F$ dans le temps.

En assimilant les efforts d'accélération à des efforts d'inertie, l'équation $M\ddot{U}+KU=F$ se traduit en chacun des points discrets de l'intervalle d'étude, par une équation d'équilibre de type statique. Il s'en suit alors, que toutes les techniques de résolution en statique peuvent être utilisées.

Le coût d'une telle résolution en nombre d'opérations est de l'ordre de [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)]:

$$\alpha \cdot N \cdot \text{lar} \cdot s$$

$\alpha > 2$ constante dépendant des caractéristiques des matrices utilisées;
 N l'ordre de la matrice globale à inverser;
 lar sa largeur de bande;
 s le nombre de pas de temps.

Vu la taille des systèmes à résoudre, cette méthode de résolution paraît coûteuse, surtout lorsqu'un grand nombre s de pas de temps est nécessaire, comme dans le cas d'un choc lent.

IV.1.2. Les méthodes indirectes

Pour réduire la taille des systèmes à résoudre, les méthodes indirectes effectuent d'abord un changement de base $U(t)=P.Y(t)$. Grâce à un choix judicieux de la matrice P , on peut obtenir un système constitué d'équations découplées à un seul ddl:

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 \cdot y_i(t) = \phi_i \cdot F(t) \quad i=1, \dots, N \quad (4.1)$$

où ϕ_i et ω_i désignent respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres du système matriciel $K.\phi=\omega^2.M.\phi$.

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, l'équation (4.1) peut être résolue par l'une ou l'autre des techniques de résolution disponibles pour ce type d'équations (Intégrale de Duhamel, Schémas d'intégration de type différences finies...). La solution de l'équation (1.66) s'écrit alors:

$$U(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i . y_i(t) \quad (4.2)$$

Considérons l'une des équations $\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 . y_i(t) = \phi_i . F(t)$. En supposant que le second membre est un signal sinusoïdal, l'analyse montre que l'amplitude de la solution $y_i(t)$ est d'autant plus grande que la pulsation propre du signal (second membre) est proche de la pulsation propre ω_i [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)]. Les différents termes $y_i(t)$ n'ont donc pas la même contribution à la solution.

Pour cette raison, en pratique et pour beaucoup de cas de charge, seule une fraction des N équations découplées, les p premières en général, sont à retenir. La contribution des autres équations à la solution est minime, de sorte que l'on peut remplacer l'expression (4.2) par:

$$U(t) = \sum_{i=1}^p \phi_i . y_i(t) . \quad (4.3)$$

Le nombre p de modes propres à prendre en compte (et donc par conséquent le temps de calcul), dépend de la structure et de la vitesse de chargement. Pour des charges quasi-statiques (pesanteur par exemple), les 10 premiers modes (ceux pour lesquels les fréquences sont les plus faibles) suffisent pour calculer la réponse.

Lorsque par contre le chargement est rapide, beaucoup de modes doivent être intégrés dans la solution. Le cas d'un choc par exemple, nécessite l'intégration d'environ les deux tiers de l'ensemble des modes [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

IV.1.3. Choix entre les méthodes directes et indirectes

Plusieurs raisons nous ont amené à opter pour les méthodes directes:

- la première vient du fait que les méthodes directes offrent la possibilité d'effectuer la résolution en dynamique avec des techniques de résolution statique, techniques que nous avons déjà testées lors de la validation en statique (chap.II.);

- la deuxième raison majeure est l'orientation de notre travail vers l'étude des impacts plutôt rapides. Il ressort en effet de l'étude bibliographique (§.III.5), que c'est pour cette gamme d'impacts que le modèle M4 semble présenter le plus d'intérêt. Or, comme nous l'avons rappelé plus haut, la méthode des modes propres doit dans le cas des impacts rapides, intégrer dans la solution un très grand nombre de modes. Les temps de calcul se trouvent alors allongés et la résolution alourdie.

Il serait toutefois intéressant de développer ultérieurement une méthode indirecte, ne serait ce que pour étudier le problème des vibrations d'une structure composite, modélisée par un modèle multiparticulaire.

IV.2. L'INTÉGRATION DANS LE TEMPS DE L'ÉQUATION $M\ddot{U}+KU=F$

Le choix s'étant porté sur l'utilisation d'une méthode de résolution directe, l'étape suivante est de discrétiser dans le temps l'équation globale $M\ddot{U}+KU=F$.

Pour ce faire, une infinité de schémas d'intégration de type différences finies existent. Mais, pour des considérations d'efficacité, seuls quelques uns sont utilisés en pratique.

Nous allons ici évoquer succinctement les schémas les plus utilisés, ainsi que leurs caractéristiques respectives, ce qui nous permettra ultérieurement de faire le choix du schéma à utiliser suivant le cas étudié et le résultat escompté.

IV.2.1. Le schéma de discrétisation des différences centrales

Le schéma des différences centrales est courant; son utilisation est répandue [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

La dérivée \ddot{U} du déplacement est approximée par [T.J.R.Hughes (1987)]:

$$\ddot{U}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} [U(t - \Delta t) - 2.U(t) + U(t + \Delta t)] + O(\Delta t)$$

En substituant dans l'équation globale (1.66), nous obtenons:

$$\frac{1}{\Delta t^2} M.U(t + \Delta t) = R(t) \quad (4.4)$$

avec
$$R(t) = F(t) - (K - \frac{2}{\Delta t^2} M).U(t) - \frac{1}{\Delta t^2} M.U(t - \Delta t)$$

Pour résoudre cette équation, il n'est pas nécessaire de factoriser (triangulariser) la matrice K .

Si la matrice M est diagonale, il n'est plus nécessaire non plus de la factoriser. On peut dans ce cas obtenir directement la solution au niveau de chaque élément, sans avoir à assembler M et K , ce qui assure un gain considérable au niveau de la mémoire de stockage et du temps de calcul.

En pratique, le fait que M ne soit pas diagonale ne constitue pas un handicap insurmontable (cf.IV.3.).

L'inconvénient essentiel de ce schéma est qu'il est conditionnellement stable. Cela veut dire que la solution peut diverger lorsque le pas de temps Δt est trop grand. Pour éviter cette instabilité, il faut alors imposer une condition restrictive sur le pas de temps:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \quad (4.5)$$

Le pas critique Δt_{cr} dépend des caractéristiques de la structure et des conditions aux limites [cf.M.Smaoui (1993)].

Si l'on considère les pulsations propres ω_N du système $K.\phi=\omega^2.M.\phi$, cette condition de stabilité peut s'écrire:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_N} \quad (4.6)$$

où ω_N est la plus grande pulsation propre du système [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

Cette condition de stabilité est très contraignante et impose un pas de temps très petit.

Quand à l'algorithme de calcul, il se compose de deux phases:

- une phase de pré-traitement avec:

- * formation de K et M ;
- * choix du pas de temps $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$;
- * initialisation de U_0 , \dot{U}_0 et \ddot{U}_0 ;
- * calcul de $U_{-\Delta t} = U_0 - \Delta t.\dot{U}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_0$;
- * triangularisation de $M_1 = \frac{1}{\Delta t^2} . M$

- une phase de calcul à chaque pas de temps avec:

- * calcul de $R(t)$;
- * résolution de l'équation $M_I.U(t+\Delta t)=R(t)$.

Nous noterons en passant que le calcul de $\dot{U}(t)$ et $\ddot{U}(t)$ à chaque itération n'est pas nécessaire à l'algorithme.

IV.2.2. Le schéma de discrétisation de Houbolt

Par rapport au schéma des différences centrales, le schéma de Houbolt est beaucoup moins utilisé [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

La dérivée seconde du vecteur déplacement y est approximée à l'instant $t+\Delta t$ par:

$$\ddot{U}(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t^2} [2.U(t+\Delta t) - 5.U(t) + 4.U(t-\Delta t) - U(t-2\Delta t)] + O(\Delta t)$$

En substituant dans l'équation globale (1.66) écrite à l'instant $t+\Delta t$, nous obtenons:

$$\begin{cases} K_I.U(t+\Delta t) = R(t+\Delta t) \\ K_I = K + \frac{2}{\Delta t^2} \cdot M \\ R(t+\Delta t) = F(t+\Delta t) + M \cdot \left[\frac{5}{\Delta t^2} \cdot U(t) - \frac{4}{\Delta t^2} \cdot U(t-\Delta t) + \frac{1}{\Delta t^2} \cdot U(t-2\Delta t) \right] \end{cases} \quad (4.7)$$

La détermination de $U(t+\Delta t)$ nécessite au préalable, la détermination de $U(t)$, $U(t-\Delta t)$ et $U(t-2\Delta t)$. Généralement, des procédures spéciales sont nécessaires pour définir $U(-\Delta t)$ et $U(-2\Delta t)$ à l'instant initial [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

A la différence du schéma précédent des différences centrales, dans le terme inconnu $K_I.U(t+\Delta t)$ apparaît la matrice de rigidité K . Cela implique que lorsque $M=0$, le problème se ramène directement à une analyse statique $K.U(t+\Delta t)=R(t+\Delta t)$.

Une autre différence essentielle avec le schéma des différences centrales est que le schéma de Houbolt est inconditionnellement stable. En conséquence, le pas de temps Δt peut être choisi beaucoup plus grand que dans le cas du schéma des différences centrales [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)]. Le choix de ce pas est toutefois limité par des considérations de précision numérique.

L'algorithme de calcul se compose de deux étapes:

- une étape de pré-traitement avec:

- * formation de K et M ;
- * Choix du pas Δt ;
- * initialisation de $U(-\Delta t)$ et $U(-2\Delta t)$ à l'aide de procédures spéciales;
- * formation de $K_1 = K + \frac{2}{\Delta t^2} \cdot M$;
- * triangularisation de K_1 .

- une étape de calcul pas par pas avec:

- * calcul de $R(t + \Delta t)$;
- * résolution de l'équation $K_1 \cdot U(t + \Delta t) = R(t + \Delta t)$.

VII.2.3. Le schéma de discrétisation de Wilson- θ

L'hypothèse de base suppose que la variation de l'accélération \ddot{U} est linéaire entre les instants t et $t + \theta \cdot \Delta t$ (θ étant un réel supérieur ou égal à 1).

Si τ est une durée entre 0 et $\theta \cdot \Delta t$, l'hypothèse ci-dessus se traduit par:

$$\frac{1}{\tau} \cdot [\ddot{U}(t + \tau) - \ddot{U}(t)] = \frac{1}{\theta \cdot \Delta t} \cdot [\ddot{U}(t + \theta \cdot \Delta t) - \ddot{U}(t)]$$

A partir de là, et en intégrant par rapport à τ , on peut obtenir l'expression:

$$\ddot{U}(t + \theta \cdot \Delta t) = \frac{6}{(\theta \cdot \Delta t)^2} \cdot [U(t + \theta \cdot \Delta t) - U(t)] - \frac{6}{\theta \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}(t) - 2 \cdot \ddot{U}(t)$$

On fait aussi l'hypothèse que le vecteur charge varie linéairement entre les instants t et $t + \theta \cdot \Delta t$, c'est à dire que l'on a :

$$F(t + \theta \cdot \Delta t) = F(t) + \theta \cdot [F(t + \Delta t) - F(t)].$$

Après substitution dans l'équation globale (1.66) écrite à l'instant $t + \theta \cdot \Delta t$, on obtient le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \cdot U(t + \theta \cdot \Delta t) = R(t + \theta \cdot \Delta t) \\ K_1 = K + \frac{6}{(\theta \cdot \Delta t)^2} \cdot M \\ R(t + \theta \cdot \Delta t) = F(t + \theta \cdot \Delta t) + M \cdot \left[\frac{6}{(\theta \cdot \Delta t)^2} \cdot U(t) + \frac{6}{\theta \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}(t) + 2 \cdot \ddot{U}(t) \right] \end{array} \right. \quad (4.8)$$

K apparaît dans le terme inconnu $K_I.U(t+\theta.\Delta t)$; lorsque $M=0$, on retrouve le cas statique: $K.U(t+\theta.\Delta t) = F(t+\theta.\Delta t)$

La condition pour que le schéma soit inconditionnellement stable est $\theta \geq 1.37$. La valeur $\theta=1.40$ est souvent utilisée.

Par rapport au schéma de Houbolt, nous noterons l'avantage de ne pas avoir de procédures spéciales à utiliser.

L'algorithme de calcul comporte deux étapes:

- une étape de pré-traitement avec:

- * formation de K et M ;
- * Choix de θ et du pas Δt ;
- * initialisation de U_0, \dot{U}_0 et \ddot{U}_0 ;
- * formation de $K_I = K + \frac{6}{(\theta.\Delta t)^2} \cdot M$;
- * triangularisation de K_I .

- une étape de calcul pas par pas avec:

- * calcul de $R(t+\theta.\Delta t)$;
- * résolution de l'équation $K_I.U(t+\theta.\Delta t) = R(t+\theta.\Delta t)$.
- * calcul de

$$\ddot{U}(t+\Delta t) = \frac{6}{\theta^3.\Delta t^2} \cdot [U(t+\theta.\Delta t) - U(t)] - \frac{6}{\theta^2.\Delta t} \cdot \dot{U}(t) - (1 - \frac{3}{\theta}) \cdot \ddot{U}(t)$$

$$\dot{U}(t+\Delta t) = \dot{U}(t) + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{U}(t+\Delta t) + \ddot{U}(t)]$$

$$U(t+\Delta t) = U(t) + \Delta t \cdot \dot{U}(t) + \frac{\Delta t^2}{6} [\ddot{U}(t+\Delta t) + 2\ddot{U}(t)]$$

IV.2.4. Le schéma de discrétisation de Newmark

Le schéma de Newmark a été utilisé dans la plupart des travaux numériques dont nous disposons [H.Aggour & C.T.Sun (1988), H.Y.T.Wu & F.K.Chang (1989), C.T.Sun & W.J.Liou (1989), J.K.Chen & C.T.Sun (1985), D.S.Cairns & P.A.Lagace (1989)...].

Les approximations suivantes sont utilisées [T.J.R.Hughes (1987)]:

$$\begin{aligned} U(t+\Delta t) &= U(t) + \Delta t \cdot \dot{U}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\alpha) \cdot \ddot{U}(t) + 2\alpha \cdot \ddot{U}(t+\Delta t)] \\ \dot{U}(t+\Delta t) &= \dot{U}(t) + \Delta t \cdot [(1-\delta) \cdot \ddot{U}(t) + \delta \cdot \ddot{U}(t+\Delta t)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

où α et δ sont des paramètres qui peuvent être choisis de façon à assurer la stabilité et la précision du schéma.

Le cas $\alpha=1/6$ et $\delta=1/2$ correspond au schéma de Wilson- θ pour $\theta=1$.

Le cas $\alpha=1/4$ et $\delta=1/2$ correspond à un schéma à accélération moyenne constante. Ce dernier schéma est d'ailleurs le plus utilisé [C.T.Sun & W.J.Liou (1989), J.K.Chen & C.T.Sun (1985c), D.S.Cairns & P.A.Lagace (1989)...].

En exprimant $\ddot{U}(t+\Delta t)$ à partir de l'expression (4.9) et en substituant dans l'équation globale écrite à l'instant $t+\Delta t$, on obtient:

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 \cdot U(t+\Delta t) &= R(t+\Delta t) \\ K_1 &= K + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot M \\ R(t+\Delta t) &= F(t+\Delta t) + M \cdot V(t) \\ V(t) &= \left[\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U(t) + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}(t) + \left(-1 + \frac{1}{2\alpha}\right) \cdot \ddot{U}(t) \right] \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Le schéma est inconditionnellement stable si

$$\delta \geq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (4.11)$$

L'algorithme de calcul procède en deux étapes:

- étape de pré-traitement avec:

- * formation de K et M ;
- * Choix de δ , α et du pas Δt ;
- * initialisation de U_0 , \dot{U}_0 et \ddot{U}_0 ;
- * formation de $K_1 = K + \frac{2}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot M$;
- * triangularisation de K_1 .

- une étape de calcul pas par pas avec:

* calcul de $R(t+\Delta t)$;

* résolution de l'équation $K_j.U(t+\Delta t) = R(t+\Delta t)$.

* calcul de

$$\ddot{U}(t+\Delta t) = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [U(t+\Delta t) - U(t)] - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}(t) + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \cdot \ddot{U}(t)$$

$$\dot{U}(t+\Delta t) = \dot{U}(t) + \Delta t \cdot [(1-\delta) \cdot \ddot{U}(t) + \delta \cdot \ddot{U}(t+\Delta t)]$$

Nous remarquerons la relation étroite entre les schémas de Newmark et de Wilson- θ ; les deux peuvent en effet être générés à partir d'un seul schéma plus général utilisant les approximations [G.Dhatt & G.Touzot (1984)]:

$$\ddot{U}(t+\tau) = \ddot{U}(t) + \tau \cdot [(1-\delta) \cdot \ddot{U}(t) + \delta \cdot \ddot{U}(t+\tau)]$$

$$U(t+\tau) = U(t) + \tau \cdot \dot{U}(t) + \frac{\tau^2}{2} [(1-2\alpha) \cdot \ddot{U}(t) + 2\alpha \cdot \ddot{U}(t+\tau)]$$

Pour $\tau=\Delta t$, on retrouve le schéma de Newmark et pour $\tau=\theta \cdot \Delta t$ celui de Wilson- θ .

Nous noterons enfin que lorsque $\alpha=1/4$, $\delta=1/2$ et $F=0$, il y a conservation de l'énergie totale $\frac{1}{2}[\dot{U}(t) \cdot M \cdot \dot{U}(t)] + \frac{1}{2}[U(t) \cdot K \cdot U(t)]$ à chaque instant t [T.J.R.Hughes (1987)]. Ceci offre un bon moyen de vérification de l'algorithme de calcul.

IV.2.5. Critères du choix du schéma de discrétisation dans le temps

Il nous semble, à travers le parcours des schémas de discrétisation les plus connus, qu'aucun schéma ne peut être adopté de façon définitive pour résoudre tous les cas de figure. Nous devons donc adapter le choix du schéma au cas que nous voulons étudier.

Certains critères semblent néanmoins devoir guider ce choix:

- la durée des calculs a une influence certaine sur ce choix. Cette durée dépend du pas de temps choisi. De ce fait, elle est plus longue pour les schémas conditionnellement stables, tel que celui des différences centrales. La longue durée des calculs peut constituer un handicap sérieux lorsque le système à résoudre est de grande taille, ou lorsque plusieurs calculs tests sont nécessaires. Le cas d'une matrice masse diagonale peut réduire cet handicap;

- la précision numérique des calculs conditionne également ce choix. Elle dépend également du pas de temps Δt . Les schémas conditionnellement stables tel que celui des différences centrales sont les plus précis. Mais, à priori, nous ne pouvons

pas prédire les écarts de précision entre les différents schémas avant d'avoir procédé effectivement aux calculs numériques;

- la mémoire de stockage nécessaire peut également influencer le choix du schéma de discrétisation. Lorsqu'en effet la taille du système à résoudre est grande, la mémoire nécessaire peut dépasser la capacité disponible. Le schéma des différences centrales, avec une matrice masse diagonale, semble le plus approprié lorsqu'un tel problème se pose. Bien sûr, il y a d'autres solutions possibles (stockage en ligne de ciel, résolution avec segmentation sur disque...), mais elles sont plus compliquées à mettre en oeuvre et plus coûteuses en temps de calcul;

- la difficulté de mise en oeuvre, et notamment l'existence pour certains schémas de procédures spéciales d'initialisation peut désavantager certains schémas;

- la possibilité de procéder à des tests de validation progressive peut privilégier certains schémas. Cette possibilité semble privilégier le schéma de Newmark à accélération constante, qui offre une possibilité de validation lorsque $F=0$.

A travers ces remarques, il nous semble que le schéma de Newmark à accélération constante offrant la possibilité d'effectuer des calculs rapides peut permettre un gain considérable de temps lors des étapes de validation du code de calcul. Il permet aussi de procéder à une validation intermédiaire de l'algorithme. C'est ce schéma que nous choisissons pour le développement de notre code.

Le schéma des différences centrales pourra être utile pour pallier à d'éventuels problèmes de mémoire, ou pour assurer une très bonne précision numérique. Son développement sera, le cas échéant, à envisager.

IV.3. POSSIBILITÉS DE CHOIX DE LA STRUCTURE DE LA MATRICE MASSE

L'expression (1.62) qui définit la matrice masse élémentaire, permet par assemblage de construire la matrice masse globale M . Cette matrice est pleine (en fait elle présente une structure bande). Elle est appelée *matrice consistante*. Nous avons par ailleurs vu au paragraphe précédent, que pour certains schémas de discrétisation, et notamment celui des différences centrales, le fait de pouvoir disposer d'une matrice masse diagonale peut permettre un gain considérable au niveau de la mémoire de stockage et du temps de calcul.

En fait, il existe une infinité de manières pour répartir la masse totale sur les noeuds, de façon à obtenir une matrice masse diagonale équivalente. Clough (1969) a expliqué que ces répartitions reviennent à substituer aux fonctions de forme N_i utilisées dans le calcul de la matrice élémentaire M^e (cf.annexe.I.b-c.), des fonctions de forme appropriées N_i' constantes par morceaux.

Deux questions se posent alors:

- est ce que la convergence est assurée (convergence quand Δt tend vers 0) ?
- et si oui, n'y a-t-il pas réduction de l'ordre de convergence?

En réponse à la première de ces deux questions, plusieurs répartitions ont été testées. A travers la littérature, deux types de matrice masse diagonale semblent se distinguer:

- la matrice masse diagonale obtenue à partir de la masse consistante en annulant tous les termes hors de la diagonale principale, et en pondérant les termes diagonaux de façon à conserver la masse totale;
- la matrice masse diagonale obtenue en répartissant également la masse totale sur tous les noeuds.

Pour ces deux types de matrice masse, la convergence est assurée, mais l'ordre de cette convergence est généralement diminué.

Le premier type de matrice masse, obtenue par pondération, que nous appellerons *matrice masse diagonale* tout court, a été testée par quelques auteurs.

Hinton et col. (1976) ont signalé que l'utilisation de la matrice masse consistante pleine ne conduit pas systématiquement, comme on pourrait le penser, à des résultats plus précis que ceux issus de l'utilisation de la matrice masse diagonale. Ce résultat a été démontré ultérieurement par certains auteurs [*R.W.Clough (1969)*, *K.Washizu (1969)*], qui ont aussi souligné qu'une meilleure précision pouvait être obtenue avec la matrice masse diagonale, dans l'étude de problèmes linéaires de dynamique avec des éléments isoparamétriques quadratiques.

Tout cela fait que l'utilisation de la *matrice masse diagonale* à côté de la *matrice masse consistante* peut s'inscrire dans les perspectives d'amélioration du code éléments finis que nous développons.

IV.4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $M\ddot{U}+KU=F$ DANS LE CAS D'UN CONTACT DE TYPE HERTZ

Lorsque la force de contact est supposée de type Hertz, elle représente une inconnue du problème. Ce dernier est alors régi par trois équations:

- l'équation (1.66) de mouvement de la plaque:

$$M.\ddot{U}+K.U=F$$

- l'équation de mouvement du projectile, écrite en son centre de gravité:

$$\boxed{f = m \cdot \ddot{w}_2} \quad (4.12)$$

w_2 représentant le déplacement du projectile et m sa masse, f représentant la valeur positive de la force de contact au centre de la plaque;

- la relation d'indentation qui relie f aux déplacements w_2 du projectile et w_1 du centre de la plaque.

Nous avons par ailleurs vu au chapitre précédent que l'événement impact peut contenir des phases de chargement, de décharge, et même de rechargement dans certains cas. Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas d'une phase de chargement. Nous avons alors (cf. §III.3.3.):

$$\boxed{f = k_c \cdot \alpha^{3/2}} \quad (4.13)$$

avec $f \geq 0$ et $\alpha = w_2 - w_1$

Les composantes du vecteur F sont proportionnelles à f , la somme négative des composantes de F valant f .

Nous disposons ainsi de trois relations couplées, pour la détermination de trois inconnues, à savoir le vecteur déplacement U (dont w_1 est une composante), la force f (reliée directement à F), et enfin le déplacement w_2 du projectile.

Pour illustrer la démarche de résolution, nous allons utiliser ici le schéma de discrétisation de Newmark à accélération constante (cf. §IV.2.4.). Hormis quelques petits détails, la démarche serait identique avec le schéma des différences centrales.

La discrétisation dans le temps de l'équation $M \cdot \ddot{U} + K \cdot U = F$ par le schéma de Newmark fournit les équations (4.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \cdot U(t + \Delta t) = R(t + \Delta t) \\ K_1 = K + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot M \\ R(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) + M \cdot V(t) \\ V(t) = \left[\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U(t) + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}(t) + \left(-1 + \frac{1}{2\alpha}\right) \cdot \ddot{U}(t) \right] \end{array} \right.$$

Après introduction de la liaison cinématique et des conditions aux limites (nulles en déplacement pour simplifier), nous pouvons, en nous appuyant sur la démarche et les notations du §I.3.4., extraire l'équation utile à résoudre:

$$K_{icc} \cdot U_c(t + \Delta t) = [M \cdot V(t)]_c + F_c(t + \Delta t) \quad (4.14)$$

Nous noterons que $[M \cdot V(t)]_c = M_{cc} \cdot V_c(t) + M_{cd} \cdot V_d(t)$, et que c'est le fait que les conditions aux limites en déplacement (encastrement ou appui simple) soient nulles qui fait que $[M \cdot V(t)]_c = M_{cc} \cdot V_c(t)$.

$$\text{Nous posons alors } U_c(t + \Delta t) = H_c(t) + P_c(t + \Delta t) \quad (4.15)$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_{icc} \cdot H_c(t) = M_{cc} \cdot V_c(t) \\ K_{icc} \cdot P_c(t + \Delta t) = F_c(t + \Delta t) \end{cases} \quad (4.16) \text{ et } (4.17)$$

$U_c(t + \Delta t)$ apparaît alors comme la somme des contributions du déplacement $H_c(t)$ dû au terme d'inertie $M_{cc} \cdot V_c(t)$ et du déplacement $P_c(t + \Delta t)$ dû au contact $F_c(t + \Delta t)$.

La présence du terme d'inertie $M_{cc} \cdot V_c(t)$ traduit une différence essentielle avec un problème purement statique; le déplacement $U_c(t + \Delta t)$ n'est par exemple pas proportionnel à la force de contact $F_c(t + \Delta t)$.

Le calcul de $H_c(t)$ est immédiat; il suffit en effet d'inverser l'équation (4.16) par les techniques vues au paragraphe (I.3.4).

Le calcul de $P_c(t + \Delta t)$ est moins simple:

En accord avec les résultats de l'étude bibliographique, nous pouvons faire l'hypothèse que la force de contact s'applique uniformément sur la zone de contact, supposée de géométrie fixe dans le temps. Nous pouvons aussi, moyennant une petite approximation, assimiler cette zone de contact à un disque, pouvant ou non être ponctuel (cf. §III.3.3.). Dans ce cas, seuls les noeuds de cette zone seront concernés par le contact, de sorte que nous pouvons écrire:

$$F_c(t + \Delta t) = f_{t+\Delta t} \cdot T_c \quad (4.18)$$

où $f_{t+\Delta t}$ est la force de contact de valeur positive et T_c un vecteur constant à composantes toutes nulles sauf celles correspondant à ces noeuds de contact, la somme des composantes de T_c valant -1. Dans le cas d'une force de contact ponctuelle, seules les composantes de T_c correspondant au point de contact sont non nulles.

L'équation (4.17) peut alors se traduire, grâce au principe de superposition, par le système:

$$\begin{cases} F_c(t + \Delta t) = f_{t+\Delta t} \cdot T_c \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} P_c(t + \Delta t) = f_{t+\Delta t} \cdot C_c \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} K_{icc} \cdot C_c = T_c \end{cases} \quad (4.21)$$

C_c apparaît comme un vecteur indépendant du temps, correspondant au déplacement dû à une force de contact $f_{t+\Delta t}$ unité.

Nous pouvons alors réécrire l'équation (4.15) sous la forme:

$$U_c(t + \Delta t) = H_c(t) + f_{t+\Delta t} \cdot C_c \quad (4.22)$$

Au niveau de la composante 3 du noeud centre de la plaque, cette équation se traduit par:

$$w_1(t + \Delta t) = -h_1(t) - f_{t+\Delta t} \cdot c_1 \quad (4.23)$$

w_1 désignant la flèche au centre de la plaque

L'obtention de C_c est direct, encore par les techniques de résolution utilisées en statique (cf.I.3.4.).

Pour avoir $U_c(t+\Delta t)$, il reste alors à déterminer la valeur $f_{t+\Delta t}$ de la force de contact au centre de la plaque à l'instant $t+\Delta t$.

Nous disposons pour cela des équations couplées (4.12), (4.13) et (4.23) à savoir:

$$\begin{cases} f_{t+\Delta t} = k \cdot (w_2(t + \Delta t) - w_1(t + \Delta t))^{3/2} \\ f_{t+\Delta t} = m \cdot \ddot{w}_2(t + \Delta t) \\ w_1(t + \Delta t) = h_1(t) + f_{t+\Delta t} \cdot C_c \end{cases} \quad (4.24)$$

Le report de la troisième de ces équations dans la première élimine w_1 et restreint le système à deux équations.

En intégrant deux fois dans le temps la relation algébrique traduite par la 2^{ème} équation, nous obtenons:

$$w_2(t + \Delta t) = - \int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} \frac{f(u)}{m} du \cdot dv + (t + \Delta t) \cdot V_0 \quad (4.25)$$

où V_0 désigne la vitesse absolue du projectile au moment du contact, ou encore sa vitesse absolue initiale.

En reportant cette dernière expression dans la 1^{ère} équation du système précédent (4.24), nous obtenons l'équation en $f_{t+\Delta t}$:

$$f_{t+\Delta t} = k \cdot \left[\int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} \frac{f(t)}{m} dt \cdot dt + (t + \Delta t) \cdot V_0 - (-h_1(t) - f_{t+\Delta t} \cdot C_c) \right]^{3/2} \quad (4.26)$$

Le pas Δt étant petit, nous faisons alors l'approximation:

$$\int_0^{t+\Delta t} \int_0^{v+\Delta v} \frac{f(u)}{m} du dv = \int_0^t \int_0^v \frac{f(u)}{m} du dv.$$

Connaissant la valeur de $f(t)$ aux instants $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$, la valeur de cette intégrale double peut être évaluée numériquement par une des méthodes classiques de calcul d'intégrale (méthode des trapèzes, méthode Simpson, technique de Monte-Carlo...) [W.H.Press & col. (1992)].

Nous choisissons ici la méthode des trapèzes, plus adaptée, puisque la valeur de l'intégrale double à l'instant t est évaluée à partir de sa valeur à l'instant $t-\Delta t$. La faible valeur du pas Δt assure quant à elle une bonne précision de calcul.

Nous notons au passage la possibilité de ramener le calcul de l'intégrale double à celui d'une intégrale simple $\int_0^t \int_0^v \frac{f(u)}{m} du dv = \int_0^t (t-u) \cdot f(u) du$.

Une fois cette intégrale double déterminée, l'équation (4.26) peut être résolue par une des méthodes de résolution des équations non-linéaires [cf. W.H.Press & col. (1992)]. Nous choisissons ici la méthode de Newton-Raphson.

$f_{t+\Delta t}$ étant ainsi déterminée, il suffit alors de remonter les équations (4.22, 4.23 et 4.25) pour déterminer $w_2(t+\Delta t)$, $w_1(t+\Delta t)$ et $U_c(t+\Delta t)$. Le problème peut ainsi être résolu pas à pas. Dans le paragraphe suivant, nous résumons les étapes de l'algorithme à la base de cette résolution.

IV.5. L'ALGORITHME DE RÉOLUTION EN DYNAMIQUE (Cas du schéma de Newmark)

Le développement théorique précédent permet d'adopter l'algorithme de résolution suivant, avec un schéma de discrétisation de Newmark à accélération constante:

- * construction de K et M
- * formation de $K_1 = K + \frac{2}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot M$;
- * prise en compte de la liaison cinématique et des conditions aux limites;
- * décomposition de Cholesky de K_{lcc} ;
- * calcul de C_c et c_I par $K_{lcc} \cdot C_c = T_c$
- * à chaque pas:
 - * calcul de $M \cdot V(t)$;
 - * calcul de $H_c(t)$ par $K_{lcc} \cdot H_c(t) = M_{cc} \cdot V_c(t)$;
 - * calcul itératif de $f_{t+\Delta t}$ par la méthode de Newton-Raphson qui comprend:
 - * le calcul de $\int_0^t \int_0^v \frac{f(u)}{m} du \cdot dv$;
 - * le calcul de w_2 par (4.25);
 - * la détermination de $f_{t+\Delta t}$ suivant la loi d'indentation valable;
 - * le calcul de w_1 par (4.23);
 - * tests pour déterminer la nouvelle phase de chargement.
 - * calcul de $U_c(t + \Delta t) = H_c(t) + f_{t+\Delta t} \cdot C_c$;
 - * calcul de la vitesse et de l'accélération à $t+\Delta t$;

Sur la base de cet algorithme, nous avons développé un code de calcul. A l'aide de la méthode des éléments finis et du langage de programmation Fortran, nous avons ainsi construit un outil numérique capable de traiter par la modélisation multiparticulaire M4 les problèmes des plaques multicouches soumises à l'impact de charges dynamiques. Le prochain chapitre a pour objectif de valider ce code.

V. VALIDATION EN DYNAMIQUE DU CODE ÉLÉMENTS FINIS

V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons juger de la fiabilité du code de calcul par éléments finis en dynamique. Cette étape de validation précède le calcul et l'analyse du problème de l'impact d'une plaque multicouche qui fera l'objet du prochain chapitre.

Plusieurs démarches de validation sont envisageables:

- Une première démarche consisterait à comparer la solution numérique obtenue par ce code à une solution analytique du M4s.
- Une deuxième démarche consisterait à comparer cette solution numérique à des résultats expérimentaux.
- Une troisième démarche consisterait à imposer la force de contact comme donnée, et à vérifier le calcul par le code de la réponse globale d'une plaque multicouche.
- Une quatrième démarche consisterait à vérifier le calcul de la période de vibration d'une plaque isotrope;
- Dans une cinquième démarche enfin, nous pouvons calculer la réponse globale d'une plaque isotrope avec la force de contact comme inconnue.

La première démarche serait sans doute la plus pertinente, mais nécessiterait de disposer d'une solution analytique pour le M4 simplifié. Il s'agirait alors d'obtenir la même solution numériquement. Mais une solution analytique en dynamique reste très difficile à obtenir.

La deuxième démarche possible consisterait à confronter les résultats numériques du M4s en dynamique à des résultats d'essais de laboratoire, en se référant par exemple à la réponse globale (force de contact et inflexion) enregistrée expérimentalement sur une plaque composite impactée transversalement.

Quelques courbes ont été rapportées par certains travaux [*H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)...*]. Nous ne disposons cependant pas de données et de résultats complets.

Un autre obstacle, mentionné par *Aggour et Sun (1988)*, s'est opposé à l'adoption de cette démarche. Il s'agit d'un décalage de résultat par rapport aux résultats expérimentaux, par ailleurs reconnus, de *Takeda (1981b)*, vraisemblablement dû au fait que les conditions aux limites théoriquement imposées (encastrement) ne peuvent généralement pas être parfaitement reproduites expérimentalement.

La troisième démarche part d'un résultat issu de l'analyse bibliographique, affirmant que la réponse globale à l'impact d'une plaque composite est peu influencée par la forme de répartition dans le temps de la force de contact

(cf.§III.3.4). En s'appuyant sur la relation de conservation $m.V_0 = \int_0^{\tau} f(t) dt$,

exprimant la transformation de la quantité de mouvement du projectile en impulsion pendant la durée τ du contact, il serait possible d'imposer la répartition temporaire de la force de contact comme donnée du problème, et d'aller vérifier la réponse globale de la plaque.

Cette démarche a été adoptée par *Sun et Liou (1989)* qui se sont donnés des répartitions triangulaires et en créneau de la loi $f(t)$ et une distribution uniforme sur la surface de contact supposée circulaire (cf.§III.3.4).

Bien que présentant l'intérêt de s'attaquer dès à présent au problème de l'impact d'une plaque multicouche, cette démarche présente l'inconvénient essentiel de ne pas valider l'algorithme du calcul itératif de la force de contact à chaque pas de temps (cf.IV.4). Or, comme nous l'avons vu ailleurs (§III.3.4), cette partie de l'algorithme dynamique est d'une grande importance si nous voulons par la suite étudier la réponse locale de la plaque.

La quatrième démarche consiste à partir de l'étude des vibrations d'une plaque isotrope. Il est alors possible de vérifier le calcul numérique par le M4s de la fréquence de vibration la plus basse.

Le calcul analytique de cette période effectué par *Timoshenko et col. (1974)* pour une plaque carrée de côté L isotrope et simplement appuyée donne:

$$T_1 = \frac{a^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

où $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$ et h désigne l'épaisseur totale de la plaque

Cette démarche comme la précédente, présente l'inconvénient de ne pas fournir de validation du calcul itératif de la force de contact. Nous pensons aussi que la présence des interfaces dans la modélisation M4 introduirait des modes de vibration qui n'existent pas pour les modèles classiques [*M.Smaoui (1993)*].

La cinquième démarche enfin, se base sur l'existence, sous certaines conditions géométriques, de solutions analytiques pour la réponse globale d'une plaque

isotrope impactée par un projectile de forme sphérique. Ces solutions analytiques, développées par plusieurs auteurs, ont été rapportées par *Goldsmith (1960)*. Il s'agit alors de vérifier que le M4s fournit numériquement la même solution.

Cette démarche a été utilisée par *Wu et Chang (1989)* pour valider un code éléments finis 3D. Bien que ne se penchant que sur le cas isotrope, cette démarche permet de valider l'ensemble de l'algorithme dynamique, dans le cadre, comme nous le verrons plus loin, de la loi de Hertz modifiée. C'est cette démarche que nous retenons pour notre validation.

Pour se rapprocher de l'étude que nous envisageons plus tard, nous choisissons d'étudier une plaque plutôt qu'une poutre.

Nous allons donc commencer par présenter le problème que nous allons étudier, ainsi que sa solution analytique. Avant de procéder au calcul numérique par le M4s, nous aurons à identifier certains des paramètres se référant à la modélisation. Il s'agit du pas de temps, du nombre de couches par lequel nous modélisons la plaque, et enfin de la définition du contact supposé de type Hertz.

Nous serons amenés dans un premier temps à fixer ces paramètres de modélisation. Nous procéderons alors à une première comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Nous étudierons ensuite la sensibilité des résultats par rapport à de faibles variations de ces paramètres de modélisation.

V.2. LES DONNÉES DU PROBLÈME

Il s'agit de l'impact d'un projectile en acier de forme sphérique, sur une plaque isotrope également en acier.

La plaque est carrée, simplement appuyée sur ses quatre côtés, de 20 cm de côté et 8 mm d'épaisseur.

Elle présente les caractéristiques mécaniques suivantes rapportées par *Karas (1939)*:

module d'Young	$E=220 \text{ GPa}$
coefficient de Poisson	$\nu=0.3$
module de cisaillement	$G=84.16 \text{ GPa}$
masse volumique	$\rho=7960 \text{ kg/m}^3$

Les données se référant au projectile sont les suivantes:

rayon	1 cm
masse	33.34 g

vitesse initiale	1 m/s
------------------	-------

Le contact est supposé de type Hertz. Le coefficient de contact est $k_c = 1.6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$.

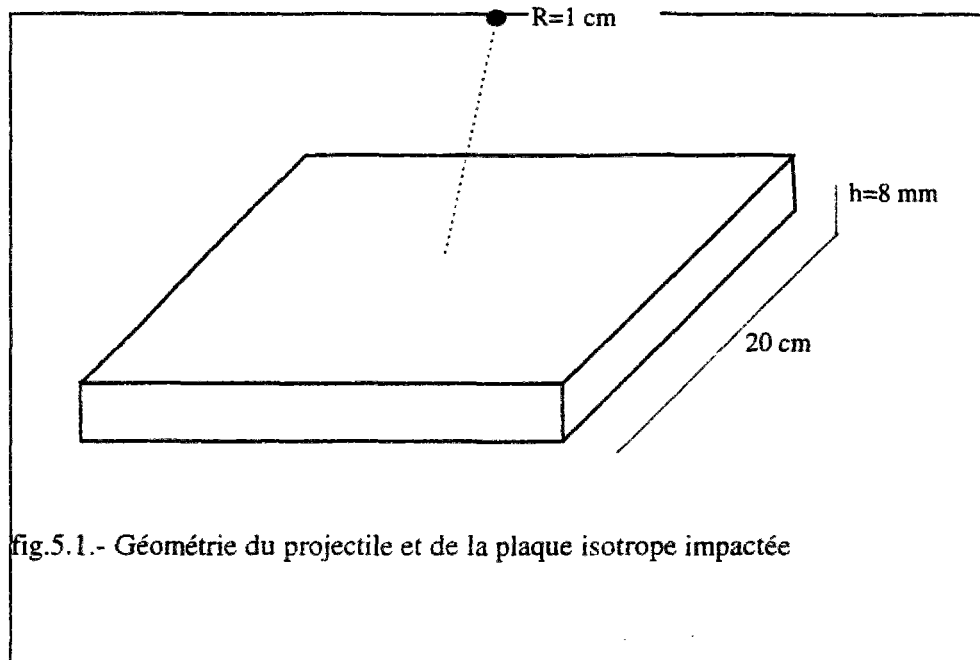


fig.5.1.- Géométrie du projectile et de la plaque isotrope impactée

V.3. LA SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLEME

En s'appuyant sur la théorie classique de plaque, plusieurs auteurs ont examiné le problème de l'impact transverse d'une masse sur une plaque mince [*K.Karas (1939), W.E.Goldsmith (1960)...*]. Ces analyses supposent que l'épaisseur $h=2b$ de la plaque est faible devant ses dimensions latérales.

On se place dans le cadre de la théorie de Hertz, où la relation d'indentation s'écrit:

$$F = k_c \alpha^{3/2} \quad \text{avec } \alpha = w_2 - w_1.$$

Lorsque la plaque, comme ici, est suffisamment épaisse, le déplacement w_1 du point d'impact vérifie l'équation différentielle [*W.E.Goldsmith (1960)*]:

$$D \cdot \nabla^4 w_1 + 2\rho b \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = F(t) \quad (5.1)$$

où $D = \frac{2b^3 E}{3(1-\mu^2)}$ avec des notations évidentes et $F(t)$ est la force de contact.

w_1 est alors exprimé par:

$$w_1(t) = \frac{1}{2b\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{ik}^2}{\omega_{ik} \iint H_{ik}^2 dx dy} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (5.2)$$

où ω_{ik} désignent les fréquences propres et H_{ik} les fonctions propres.

Le calcul numérique de cette expression est très difficile, sauf dans certains cas de conditions aux limites. C'est le cas par exemple lorsque la plaque est simplement appuyée sur ses quatre côtés.

La somme ci-haut étant infinie, une évaluation numérique suppose évidemment une troncature. Dans le problème que nous traitons ici, et dont les données ont été présentées au paragraphe précédent, les 70 premières harmoniques ont été nécessaires pour obtenir une convergence satisfaisante de la double somme (5.2). Les résultats obtenus par *Karas (1939)* pour les 13 premiers pas, sont présentés dans la table (fig.5.2). Le pas de temps τ est choisi égal à $1/180^{\text{ème}}$ de la période fondamentale de la plaque, soit $\tau=5.611 \mu\text{s}$.

$h \tau$	u (cm sek)	u (cm)	w (cm)	z (cm)	P (kg)	\dot{w} (cm/sek)
0 τ	100	0	0	0	0	0
1 τ	98.2488	$0.5562 \cdot 10^{-3}$	$0.0086 \cdot 10^{-3}$	$0.5476 \cdot 10^{-3}$	20.502	1.5390
2 τ	92.0187	$1.0901 \cdot 10^{-3}$	$0.0395 \cdot 10^{-3}$	$1.0506 \cdot 10^{-3}$	54.431	5.5014
3 τ	80.0788	$1.5729 \cdot 10^{-3}$	$0.0998 \cdot 10^{-3}$	$1.4731 \cdot 10^{-3}$	90.462	10.7478
4 τ	62.7350	$1.9736 \cdot 10^{-3}$	$0.1886 \cdot 10^{-3}$	$1.7850 \cdot 10^{-3}$	120.661	15.8263
5 τ	41.3836	$2.2657 \cdot 10^{-3}$	$0.2989 \cdot 10^{-3}$	$1.9668 \cdot 10^{-3}$	139.560	19.6565
6 τ	18.0870	$2.4326 \cdot 10^{-3}$	$0.4198 \cdot 10^{-3}$	$2.0127 \cdot 10^{-3}$	144.478	21.5490
7 τ	- 4.8917	$2.4696 \cdot 10^{-3}$	$0.5399 \cdot 10^{-3}$	$1.9297 \cdot 10^{-3}$	135.627	21.4007
8 τ	- 25.5254	$2.3843 \cdot 10^{-3}$	$0.6483 \cdot 10^{-3}$	$1.7359 \cdot 10^{-3}$	115.724	19.3158
9 τ	- 42.5466	$2.1938 \cdot 10^{-3}$	$0.7370 \cdot 10^{-3}$	$1.4568 \cdot 10^{-3}$	88.966	15.8075
10 τ	- 54.5792	$1.9219 \cdot 10^{-3}$	$0.8033 \cdot 10^{-3}$	$1.1186 \cdot 10^{-3}$	59.859	11.8115
11 τ	- 62.2137	$1.5942 \cdot 10^{-3}$	$0.8462 \cdot 10^{-3}$	$0.7480 \cdot 10^{-3}$	32.735	7.6395
12 τ	- 65.8398	$1.2349 \cdot 10^{-3}$	$0.8658 \cdot 10^{-3}$	$0.3690 \cdot 10^{-3}$	11.342	3.5070
13 τ	- 65.9494	$0.8651 \cdot 10^{-3}$	$0.8631 \cdot 10^{-3}$	$0.0019 \cdot 10^{-3}$	0.001	

fig.5.2. Table des valeurs analytiques présentées par *Karas (1939)*

Ces données permettent de déterminer la variation au cours du temps des déplacements et des vitesses de la plaque et du projectile, ainsi que la variation dans le temps de la force de contact. Nous pourrions donc visualiser l'ensemble de la réponse globale pendant la première phase de l'impact. *Goldsmith (1960)* a tracé les courbes de variation correspondantes sur une période de temps plus longue.

V.4. COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUES ET NUMERIQUES

V.4.1. Paramètres de modélisation

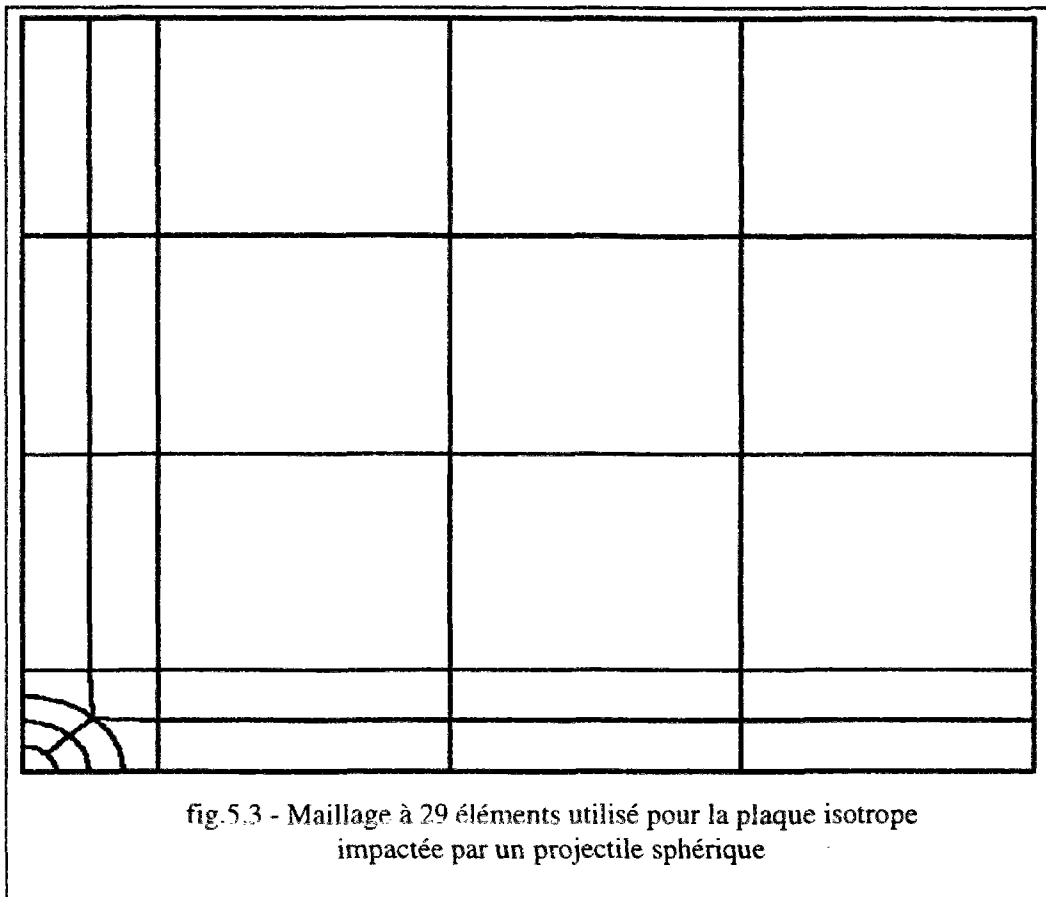
Pour la première confrontation aux résultats analytiques, nous allons fixer les paramètres se référant à la modélisation M4s à des valeurs qui seront justifiées plus tard.

La modélisation M4s nécessitant la présence d'interface, la plaque isotrope ne peut être modélisée par une seule couche. Nous l'avons alors modélisée par la superposition de quatre couches isotropes identiques, d'épaisseur égale à 2mm chacune.

Les rigidités de cisaillement d'interface sont calculées par la formule (1.45) du chapitre I.

La force de contact de type Hertz, obéissant à la loi $F=k_c.\alpha^{3/2}$ a été uniformément répartie sur la surface de contact supposée circulaire de rayon $a=R$, rayon du projectile.

Le calcul numérique M4s a été effectué avec un maillage comportant 29 éléments (fig.5.3.), et le pas de temps a été fixé dans un premier temps à $\Delta t=\tau/100$ pour assurer une bonne précision des calculs.



V.4.2. Confrontation des résultats numériques du M4s aux résultats analytiques

Pour illustrer la validation du code éléments finis, nous comparons ses résultats aux valeurs issues du calcul fait par *Karas (1939)*, et aux courbes supplémentaires tracées par *Goldsmith (1960)*.

Les figures (5.4-5.8) montrent une bonne concordance des résultats numériques et analytiques. Seule la vitesse de la plaque présente des écarts significatifs, avec un maximum d'écart de 10% environ.

fig.5.4- Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps

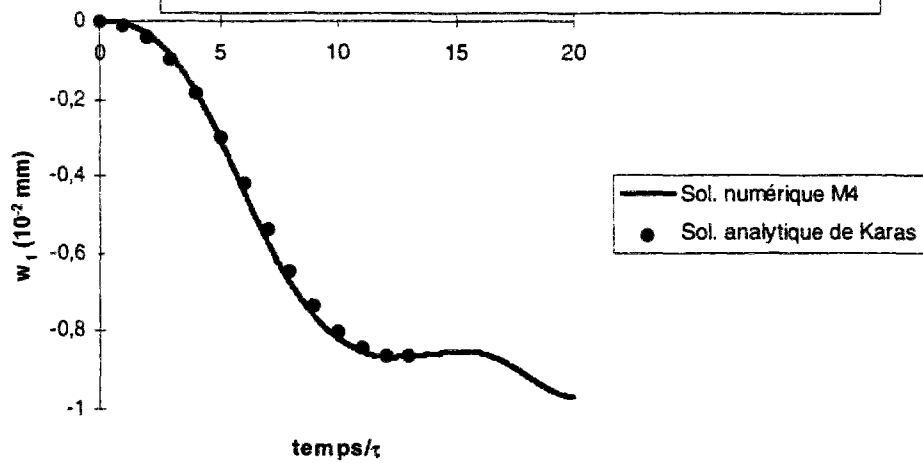


fig.5.5.- Evolution de la vitesse au centre de la plaque en fonction du temps

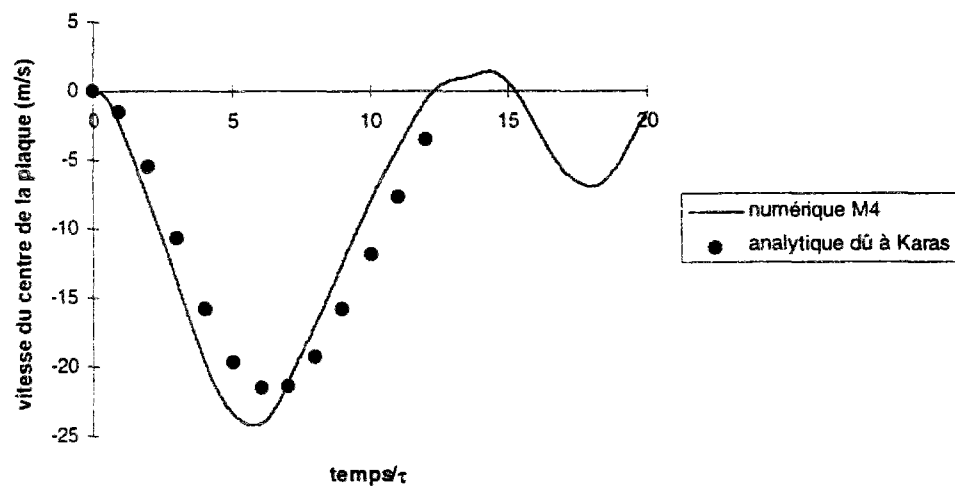


fig.5.6.- Evolution du déplacement du projectile en fonction du temps

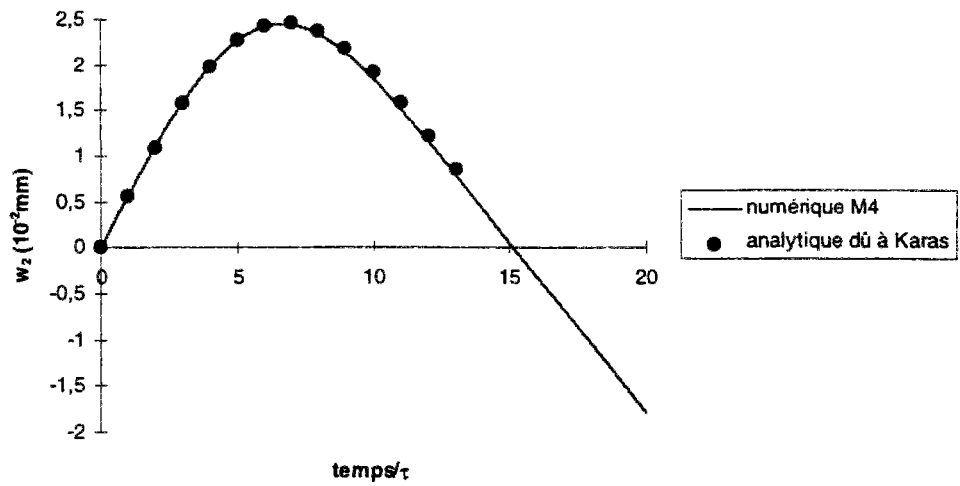
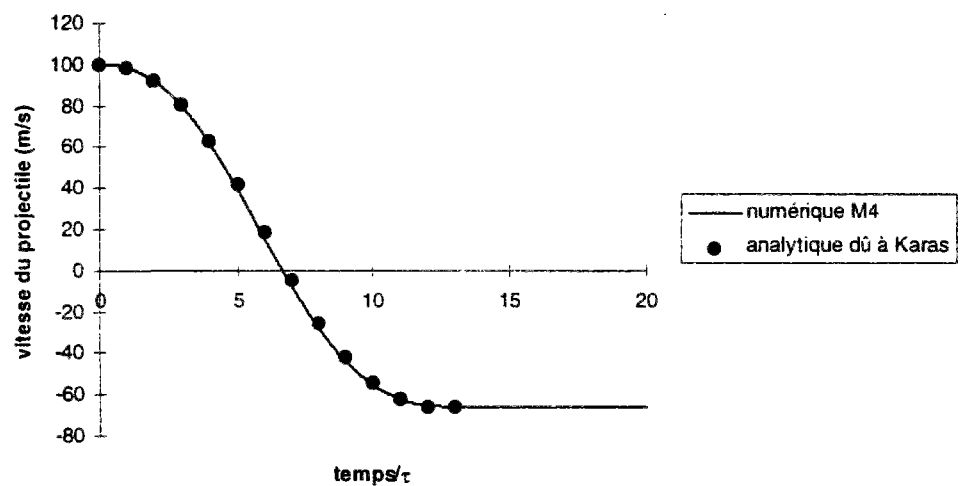
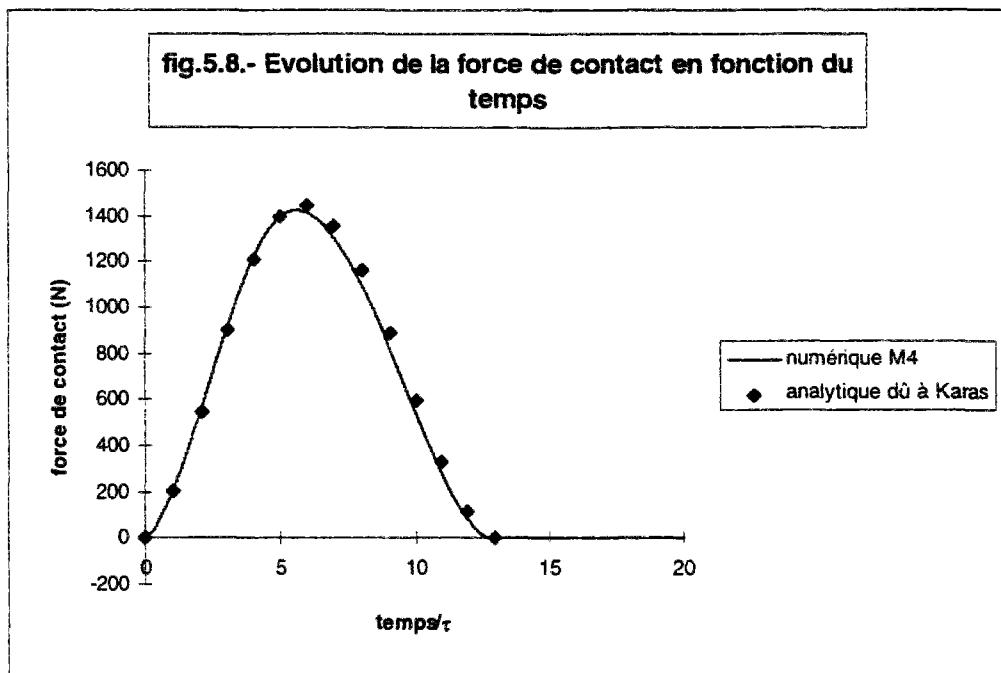
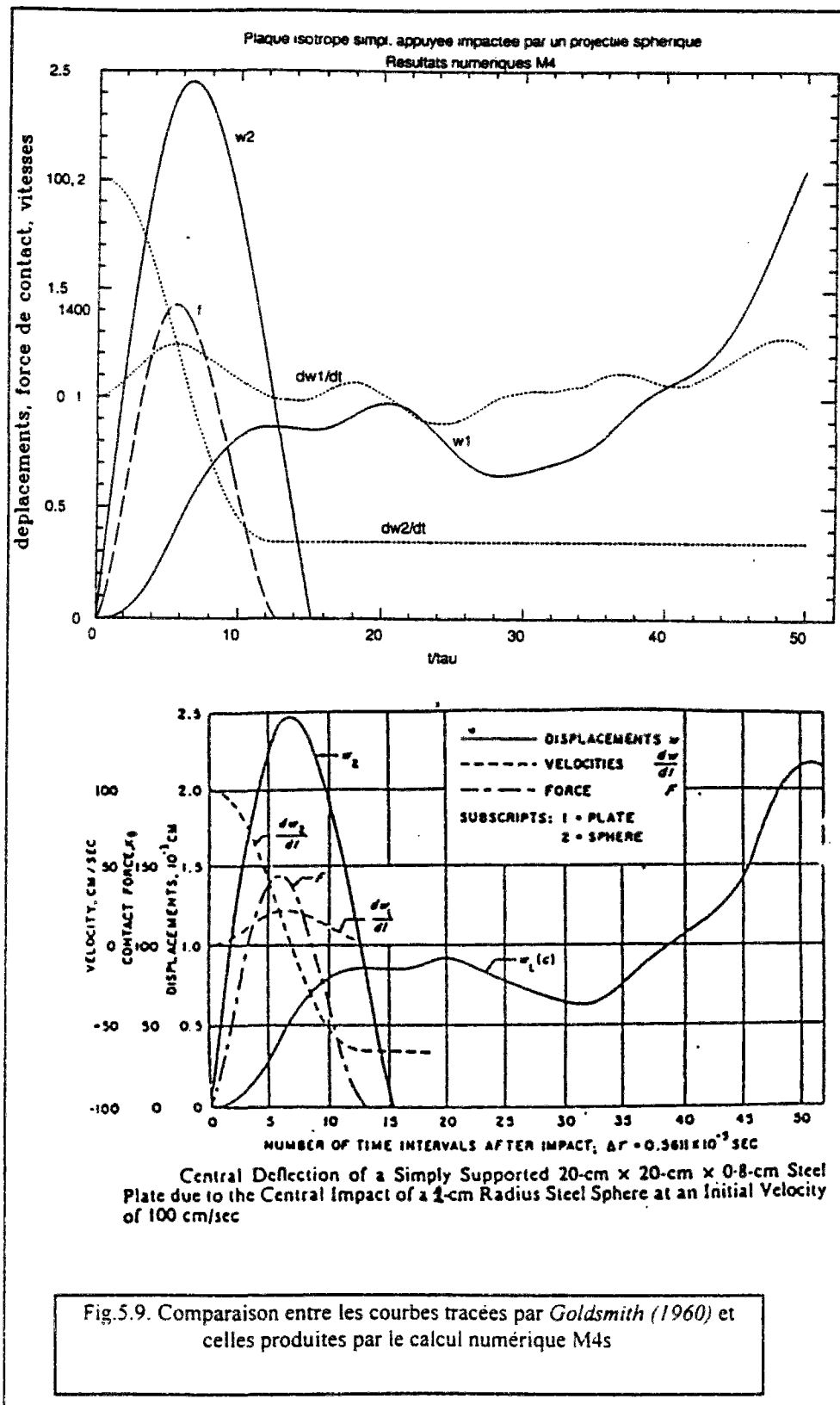


fig.5.7.- Evolution de la vitesse du projectile en fonction du temps





La comparaison aux courbes tracées par *Goldsmith (1960)* montre que le déplacement de la plaque est correctement calculé sur une longue période de temps (fig.5.9).



Plusieurs causes peuvent être à l'origine des quelques écarts enregistrés:

- d'abord la finesse du maillage adopté (fig.5.3). S'agissant d'une validation nécessitant plusieurs tests et calculs, nous avons préféré par souci de rapidité,

utiliser un maillage plus ou moins lâche. Un calcul dure alors quelques minutes (sur une machine SUN SS10).

- le fait que la théorie classique des plaques, sur laquelle se basent les calculs analytiques de *Karas* et *Goldsmith* néglige le cisaillement, ce qui n'est pas le cas du modèle M4s.
- l'introduction d'interfaces pour le modèle M4s qui n'existent pas réellement pour la plaque isotrope;
- le fait que dans la théorie de Hertz la taille de la surface de contact ne soit pas fixe. L'approche analytique montre en effet que le rayon a de contact varie avec la valeur de l'indentation α , c'est à dire aussi avec la valeur de la force de contact. La relation: $a=(\alpha R)^{1/2}$ (cf.annexe III) montre que ce rayon évolue durant l'impact. Dans le cadre du calcul numérique M4, nous sommes contraints de fixer ce rayon de contact pendant toute la durée de l'impact. Or, comme nous le verrons plus loin (§V.5.3.), la valeur de ce rayon de contact peut affecter les résultats;
- l'étude analytique montre aussi que la force de contact n'est pas uniformément répartie sur la surface de contact. La pression varie en effet en fonction de la distance r au centre de la plaque selon l'expression (cf.annexe III):

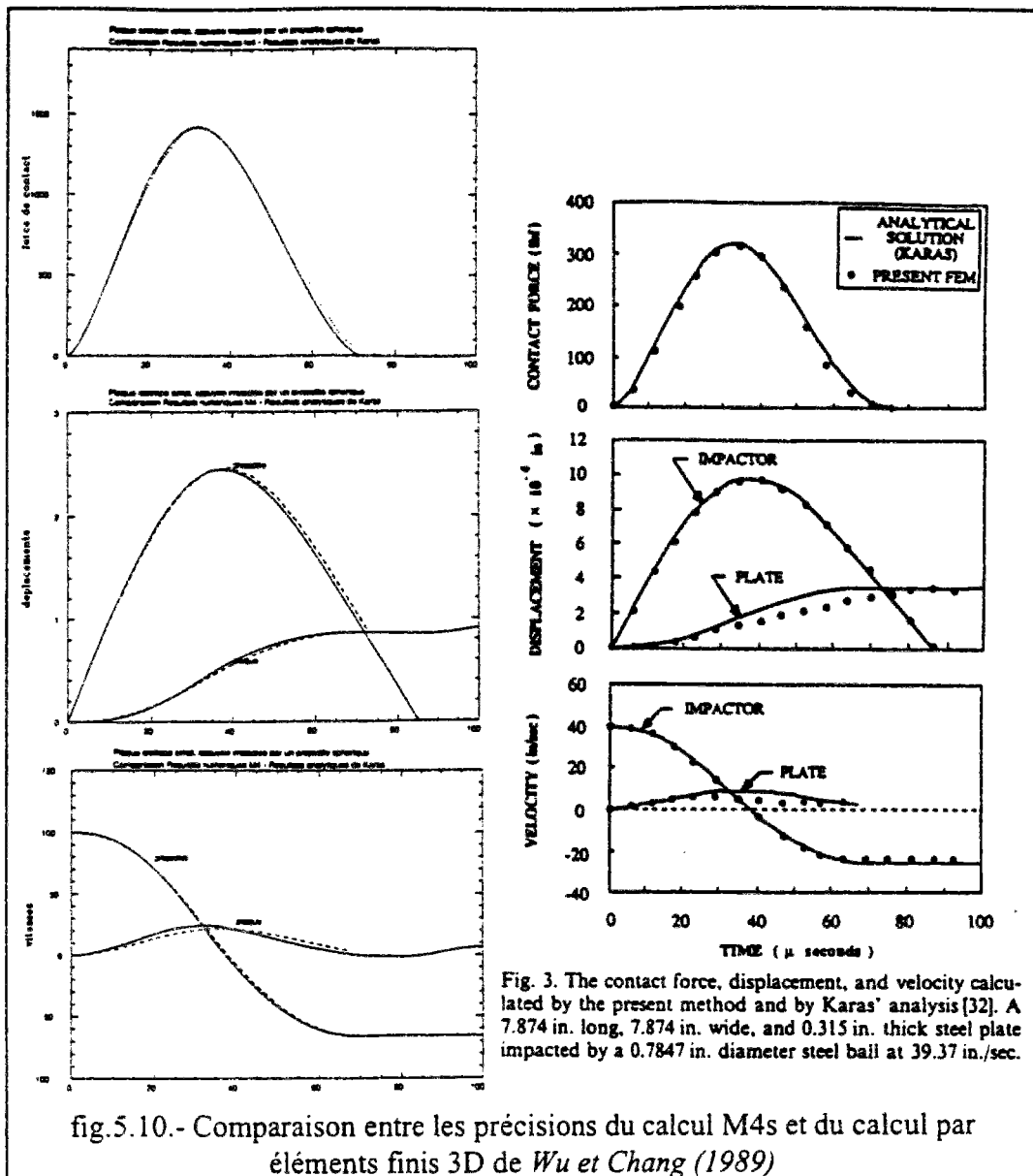
$$p(r) = \frac{3F}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

Dans le cadre du calcul M4, nous avons introduit une pression uniforme sur toute la surface de contact. Nous nous sommes basés sur le résultat d'analyse bibliographique du chapitre III, selon lequel la répartition de la force de contact affecte peu la réponse globale. Des études éléments finis dont nous disposons [*Wu et Chang (1989)*, *C.A.Ross & col. (1985)*], vont jusqu'à supposer la force de contact ponctuelle concentrée sur un noeud. Nous verrons plus loin (§V.5.3) le degré de pertinence d'un tel choix;

V.4.3. Conclusion

Pour le calcul numérique M4s, plusieurs choix étaient possibles pour les paramètres se référant à la modélisation; nous avons-ainsi choisi le pas de temps et le nombre d'interfaces et défini le contact.

Pour procéder à une comparaison à la solution analytique, nous avons fixé ces paramètres. La comparaison montre que les résultats sont tout à fait acceptables. En effet, la confrontation aux meilleurs résultats d'études numériques par éléments finis tridimensionnels [*Wu et Chang (1989)*], indique que les résultats du M4s sont au moins aussi précis (fig.5.10).



Les quelques écarts enregistrés peuvent être expliqués. Nous avons énuméré quelques causes possibles.

Pour pouvoir conclure à la validation définitive, il reste maintenant à mesurer la sensibilité des résultats et des écarts obtenus par rapport à de faibles variations des paramètres énumérés ci-haut. C'est l'objet du paragraphe suivant.

V.5. INFLUENCE DES PARAMETRES DE MODELISATION

V.5.1. Influence du choix du pas de temps Δt

Les calculs du paragraphe précédent ont été effectués avec un pas de temps $\Delta t = \tau/100$ où $\tau = 5.611 \mu s$, pour assurer une bonne précision des calculs. Les calculs étaient relativement longs (quelques minutes sur station SUN SS20).

Nous allons à présent procéder à des calculs avec des pas $\Delta t = \tau/10$ et $\Delta t = \tau$ pour voir si une augmentation du pas de temps Δt était envisageable sans que cela n'affecte considérablement la précision des calculs.

Les figures (5.11-5.13) représentent l'influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s. Elles montrent l'évolution dans le temps de la force de contact, des déplacements du centre de la plaque et du projectile, et de leurs vitesses.

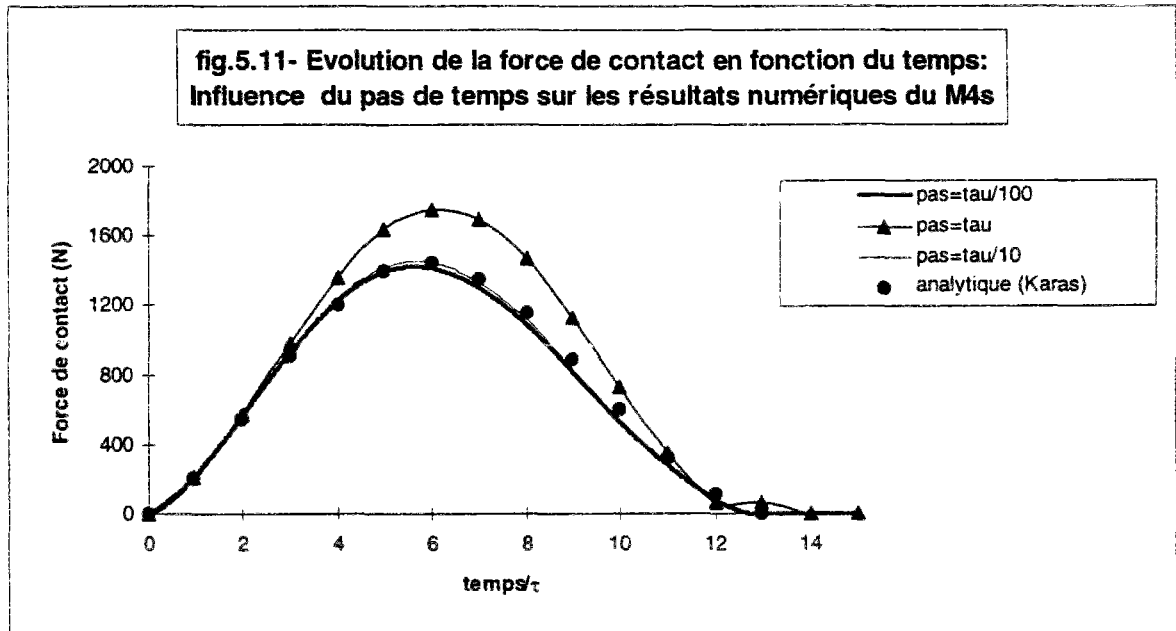


fig.5.12- Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s

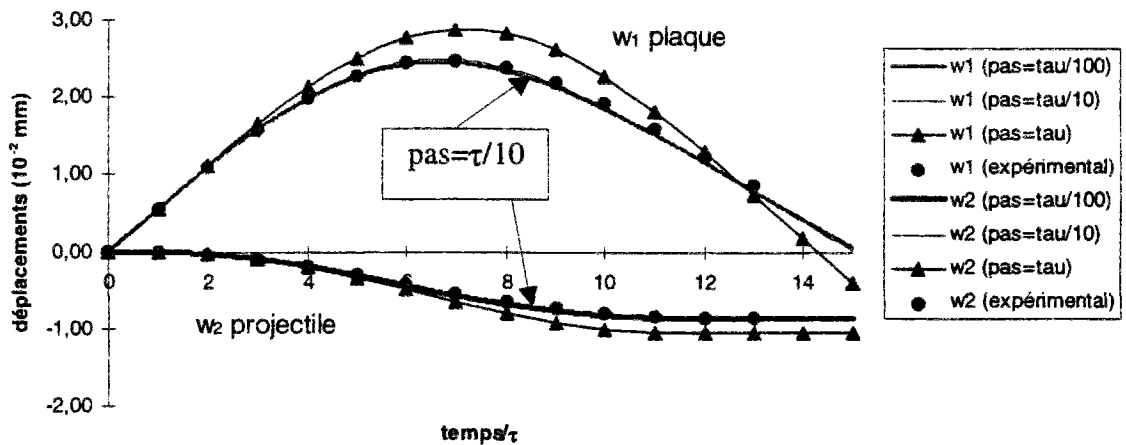
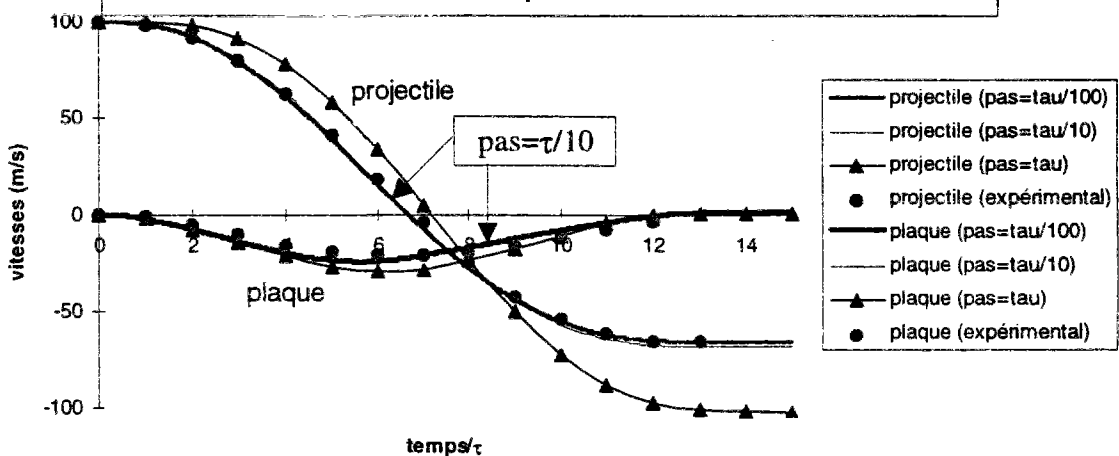


fig.5.13- Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s



A partir des résultats illustrés par les figures (5.11-5.13) nous pouvons constater que:

- le choix d'un pas plus petit permet de gagner en précision de calcul;
- le choix $\Delta t = \tau$ fournit des résultats peu précis. Les écarts avec la solution analytique atteignent presque les 35% au niveau du calcul de la vitesse $\frac{dw_1}{dt}$ du centre de la plaque;

- le choix d'un pas $\Delta t = \tau/10$ (10 fois plus grand que $\Delta t = \tau/100$) diminue certes la précision, mais cette diminution est minime (moins de 2%) par rapport au gain que nous obtenons en temps de calcul (gain d'un facteur 10).

Nous pouvons alors conclure que, dans le cadre de l'étude préliminaire que nous effectuons dans ce chapitre, nous pouvons nous contenter dans la suite d'un pas de temps $\Delta t = \tau/10$.

V.5.2. Influence de la discrétisation dans l'épaisseur

Par discrétisation dans l'épaisseur, nous faisons référence au nombre de couches identiques par lequel nous pouvons modéliser la plaque isotrope.

Les calculs exposés aux paragraphes précédents ont été effectués avec un ensemble de 4 couches. Dans ce paragraphe, nous allons observer les variations au niveau des résultats lorsque nous modélisons cette plaque respectivement par deux ou trois couches identiques.

Les résultats numériques des figures (5.14-5.16) ont été obtenus avec le même maillage (fig.5.3) et un pas de temps $\Delta t = \tau/10$.

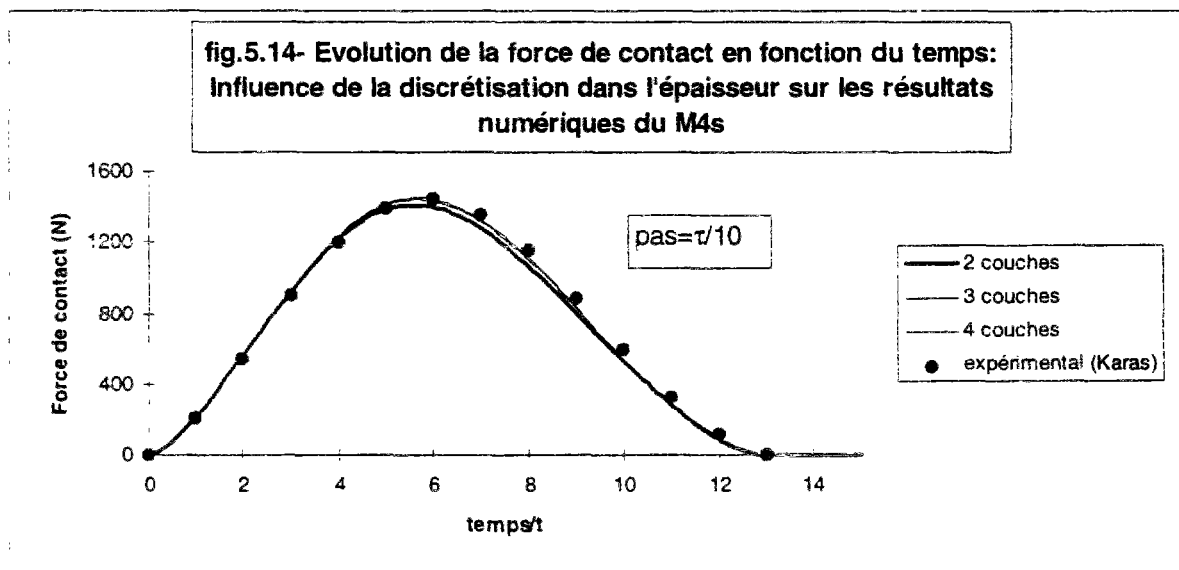
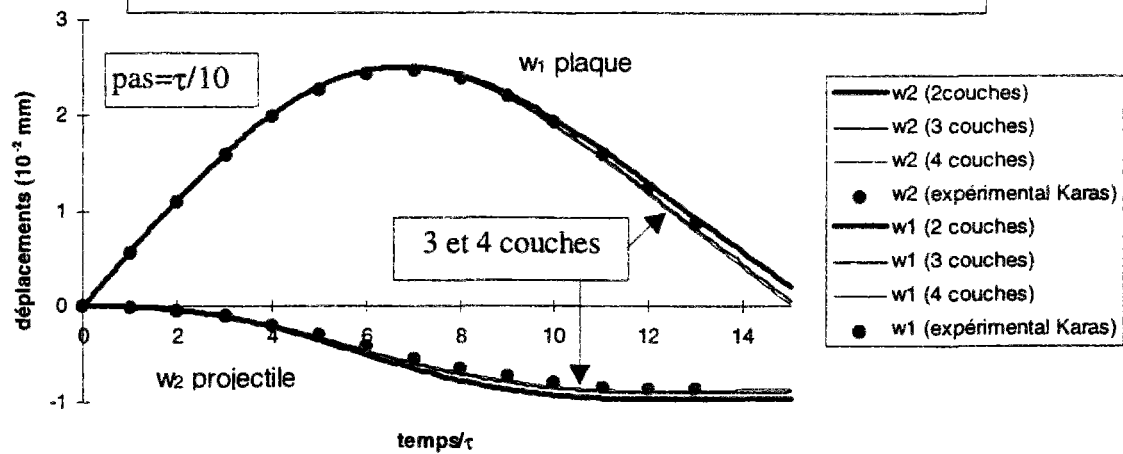
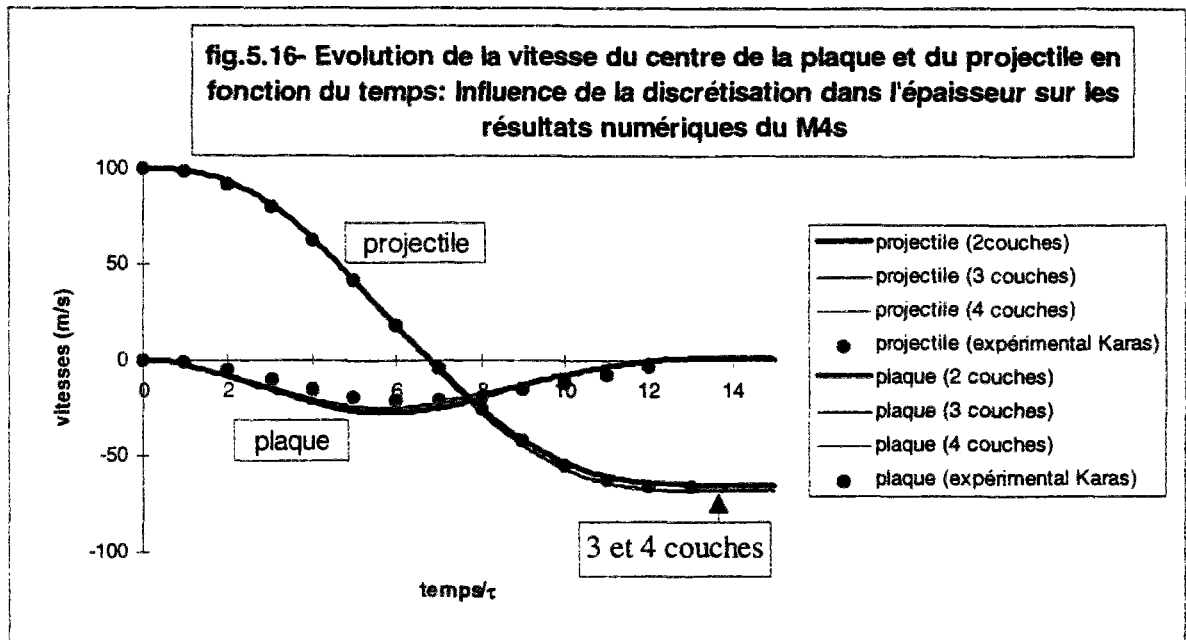


fig.5.15- Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la discrétisation dans l'épaisseur sur les résultats numériques du M4s





Nous pouvons alors remarquer que:

- la discrétisation dans l'épaisseur, c'est à dire le nombre d'interfaces que nous introduisons, a une influence sur la réponse;
- l'allure des courbes est la même quelque soit le degré de discrétisation. Les variations au niveau de l'amplitude sont faibles;
- le fait d'introduire des interfaces supplémentaires a pour effet de rigidifier la plaque. Ce résultat n'était à priori pas évident. En effet, la résolution consiste ici à trouver le champ de vitesse qui minimise sur un certain espace, une fonctionnelle représentant les énergies mises en jeu. Le champ de vitesse est constant par morceaux, c'est à dire le même pour chaque couche. Lorsque nous passons par exemple d'une modélisation par deux couches à une modélisation par 4 couches, nous élargissons l'espace sur lequel nous minimisons notre fonctionnelle, puisqu'un champ constant par morceaux sur deux couches, est aussi constant par morceaux sur 4 couches. Mais, en même temps, le fait que les rigidités aux interfaces changent de valeur lors de ce passage, fait que la fonctionnelle que nous minimisons change d'expression. Par suite, nous minimisons sur un espace plus grand une fonctionnelle différente. Dans ce cas bien sûr, nous ne pouvons à priori pas prévoir le sens de variation des résultats;
- les résultats des calculs avec 4 couches sont d'une façon générale plus proches des résultats analytiques;
- il y a très peu de variation en amplitude entre les courbes obtenues respectivement avec 3 et 4 couches. Cela veut dire que l'influence du degré de discrétisation dans l'épaisseur s'atténue quand le nombre d'interfaces augmente.

Dans le paragraphe qui suit, pour étudier l'influence de la répartition de la force de contact, nous nous contenterons d'une modélisation à deux couches, d'une part

parce que comme nous l'avons constaté, les variations sont faibles au niveau de la réponse globale à laquelle nous nous intéressons ici, et ensuite parce que cela nous rapprochera des situations que nous pensons rencontrer plus tard, où nous serons sans doute amenés à réduire au mieux le nombre d'interfaces, pour gagner en mémoire et en temps de calcul.

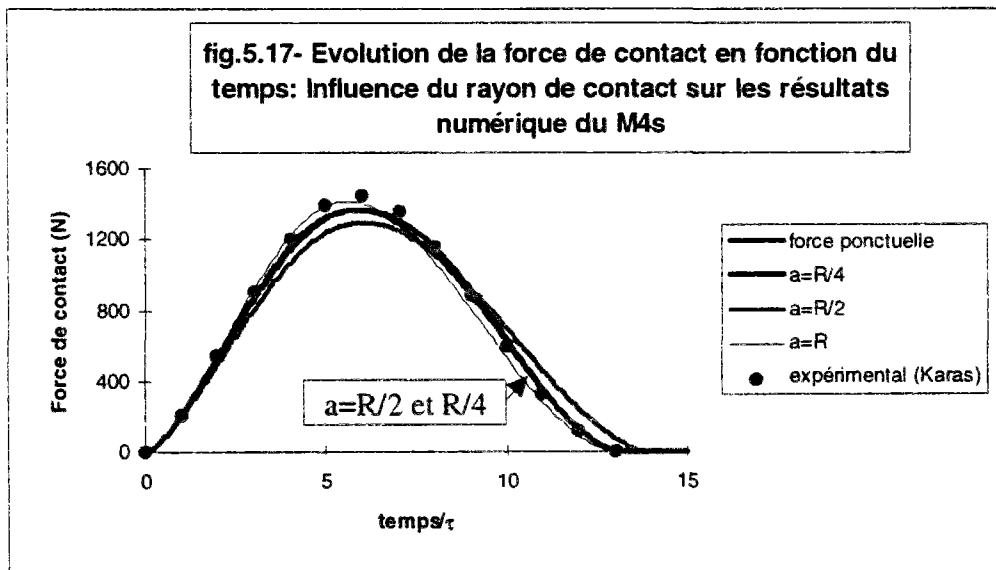
V.5.3. Effet de la localisation et de la répartition de la pression de contact

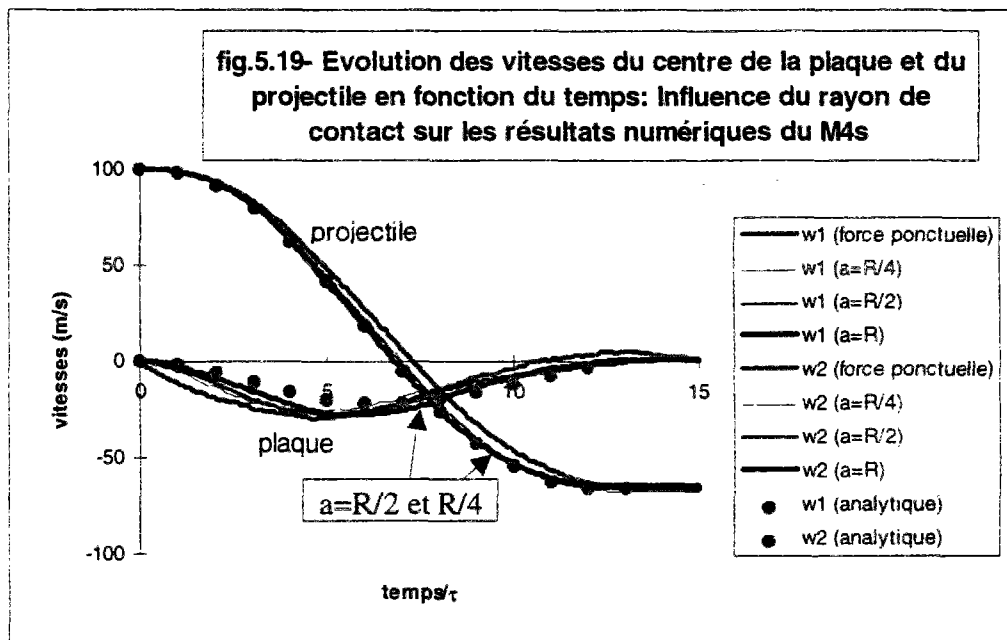
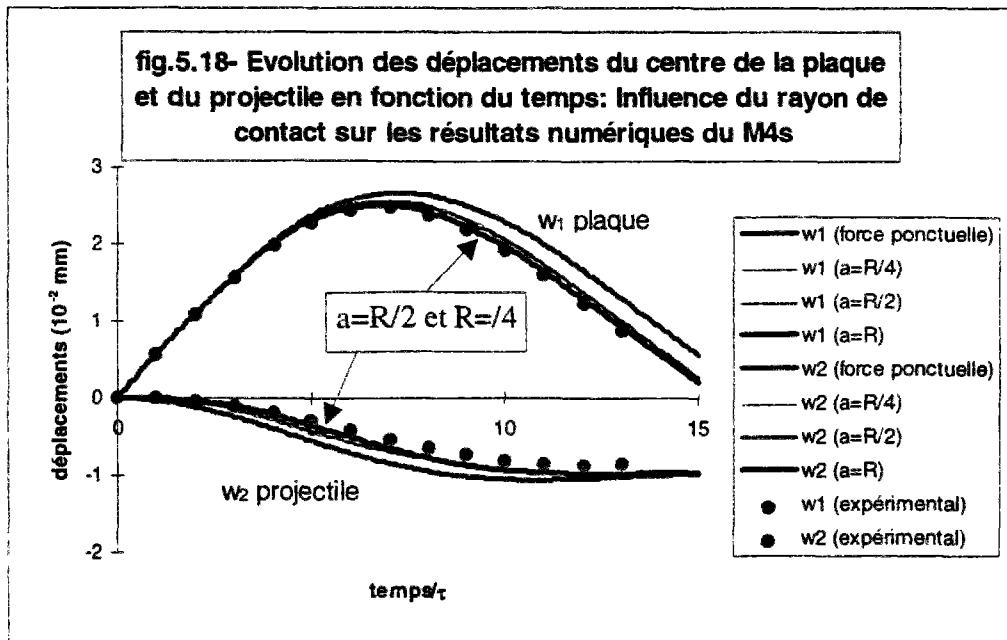
Comme nous l'avons mentionné ci-haut (cf. §V.4.2.), l'étude analytique dans le cadre de la théorie de Hertz montre que le rayon a de la surface de contact varie pendant le contact selon la relation $a = \sqrt{\alpha R} = \left(\frac{3FR}{4E}\right)^{1/3}$. La pression s'exprime

quant à elle par $p(r) = \frac{3F}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$, avec une répartition qui à l'évidence n'est pas uniforme. Pour les calculs M4 précédents, nous avons fixé le rayon de la surface de contact à $a=R$, et nous avons réparti la force de contact uniformément sur la surface de contact.

L'objectif de ce paragraphe est, d'une part d'évaluer l'erreur que nous commettons en faisant ce choix, et d'autre part de voir si l'introduction d'une force de contact ponctuelle concentrée est envisageable.

Les résultats illustrés par les figures (5.17-5.19) ont été obtenus avec une modélisation M4s à deux couches, un pas de temps $\Delta t = \tau/10$, et un rayon de contact a prenant les valeurs R , $R/2$, $R/4$ et 0 (cas d'une force ponctuelle concentrée).





Nous pouvons alors constater que:

- la taille de la surface de contact a une influence sur la réponse globale;
- cette influence n'affecte pratiquement pas l'allure des courbes, mais uniquement leurs amplitudes. La variation en fonction du rayon de contact n'exède guère les quelques pourcents;
- les résultats qui semblent être les plus proches de la solution analytique, sont obtenus avec un rayon $a=R$ égal à celui du projectile;

- quelques fluctuations parasites commencent à apparaître au niveau de la vitesse $\frac{dw_I}{dt}$ du centre de la plaque dans le cas d'une force ponctuelle concentrée;

- les écarts les plus grands sont d'ailleurs enregistrés dans le cas d'une force ponctuelle concentrée. Il paraît de ce fait préférable, pour garder une bonne précision des résultats, d'effectuer tant que possible les calculs avec une force de contact répartie.

Toutefois, les faibles écarts enregistrés laissent penser que nous pouvons espérer des résultats acceptables si, pour certains calculs, nous étions amenés à faire le choix d'une force de contact ponctuelle concentrée. Nous pouvons dans ce cas envisager des calculs avec un maillage plus lâche et plus régulier, avec des mailles rectangulaires par exemple, permettant une économie au niveau de la mémoire de stockage et du temps de calcul.

V.5.4. Conclusion

Nous venons de voir que les différents paramètres de modélisation du M4s ont un faible effet sur les résultats. Les valeurs auxquelles nous les avons fixées à la première confrontation du §V.4.1. ne sont donc pas particulières. Elles permettent cependant de se rapprocher au mieux de la solution analytique. Les résultats obtenus ne sont donc pas très sensibles à ces paramètres.

Nous pouvons alors conclure à la validation du code éléments finis que nous développons pour le calcul dynamique.

Les résultats dégagés à la fin de ce chapitre vont nous permettre aussi de fixer de façon adéquate les paramètres de modélisation pour le calcul de la réponse d'une plaque orthotrope au chapitre VII.

Notons enfin qu'il est possible de faire varier d'autres paramètres, se référant à la plaque et au projectile. Dans le prochain chapitre, nous étudions l'influence sur la réponse de la plaque isotrope de certains paramètres tels que la masse et la vitesse du projectile, la rigidité et l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites imposées.

VI. INFLUENCE DES PARAMÈTRES D'IMPACT SUR LA RÉPONSE GLOBALE D'UNE PLAQUE ISOTROPE

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution de la réponse globale de la plaque et du projectile en fonction de quelques données du problème.

Nous avons divisé ces données ou ces paramètres en deux groupes: les paramètres se référant au projectile à savoir sa masse et sa vitesse initiale, et les paramètres se référant à la plaque à savoir sa rigidité d'interface, son épaisseur, et les conditions aux limites imposées à ses bords.

L'objectif de ce chapitre est d'abord d'illustrer la rapidité de calcul du code que nous développons, puisqu'il a permis en un temps court, de procéder à d'innombrables calculs dans une large gamme de données. L'ensemble des informations obtenues permet ensuite de mieux comprendre le phénomène d'impact et les notions que nous avons vues au chapitre bibliographique.

La plaque étudiée est ici isotrope, mais elle est modélisée comme une plaque multicouche.

VI.1. INFLUENCE DES PARAMÈTRES SE RÉFÉRANT AU PROJECTILE

Nous pouvons caractériser le projectile par trois paramètres: sa masse, sa forme et sa vitesse initiale.

En supposant, pour rester dans le cadre de la théorie de Hertz, que le projectile garde toujours une forme sphérique, nous avons la possibilité de faire varier sa vitesse et sa masse. La masse $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ étant directement reliée au rayon R , nous pouvons la faire varier en faisant varier le rayon R .

Les calculs numériques pour différentes valeurs de V_0 et de R ont été effectués en modélisant la plaque isotrope respectivement avec 2 couches et 4 couches. Les résultats obtenus sont similaires. Nous en présentons ceux correspondant à 4 couches.

VI.1.1. Influence de la vitesse du projectile

Les résultats sont illustrés par les courbes des figures (1-a,b,c).

fig.6.1.a- Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile

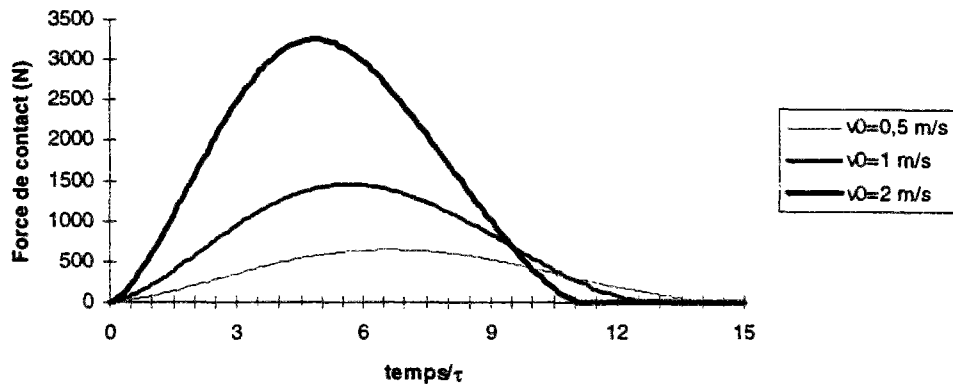


fig.6.1.b- Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile

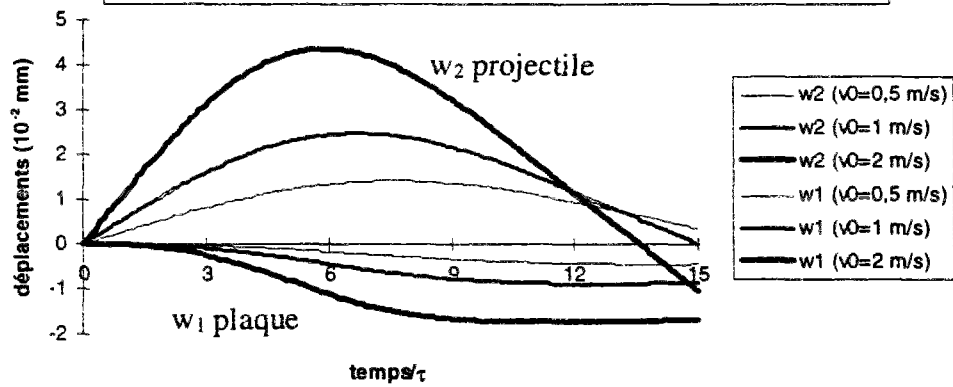
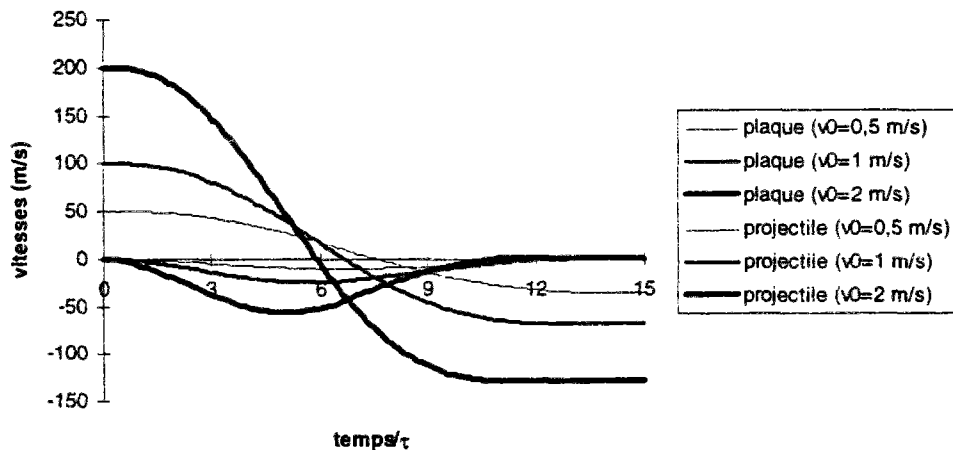


fig.6.1.c- Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile

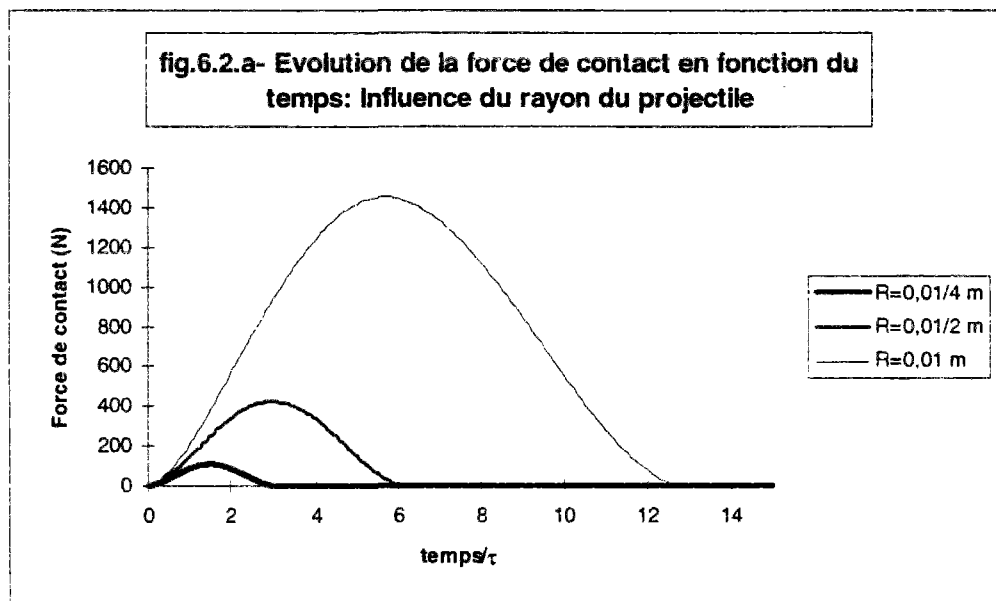


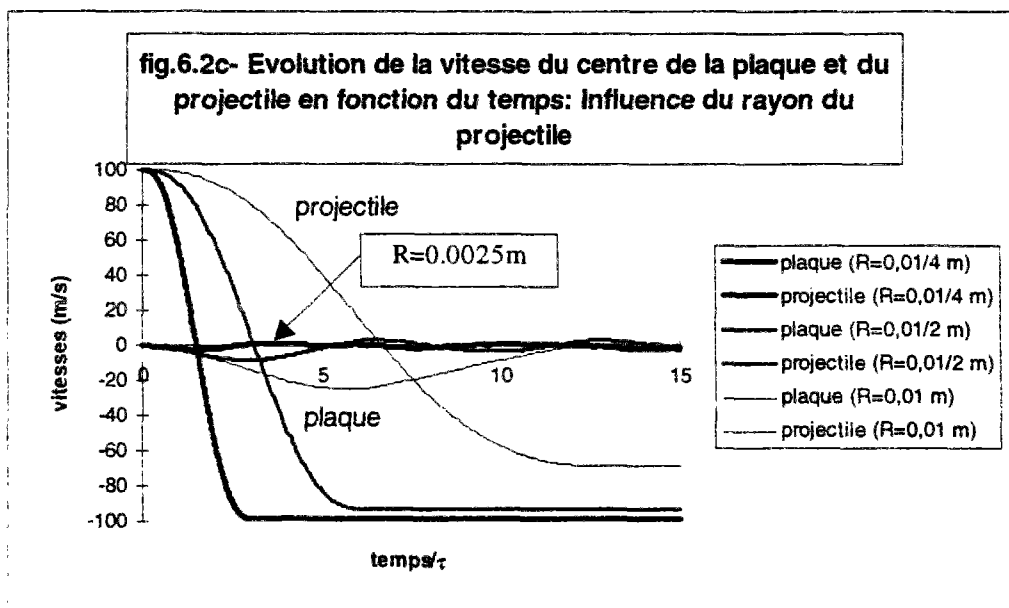
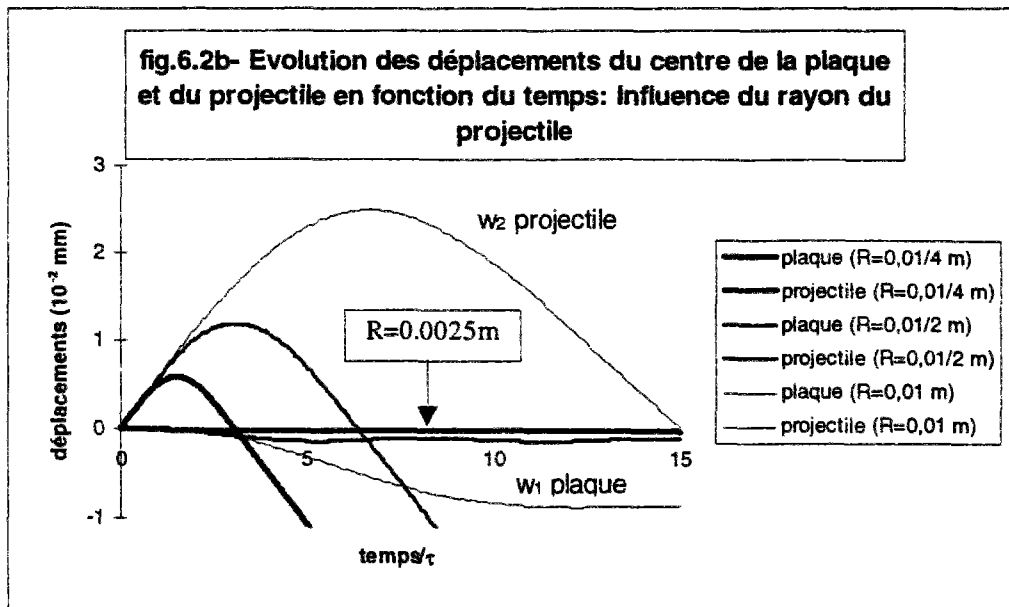
Elles appellent plusieurs remarques:

- la réponse varie en amplitude et en période. Une augmentation de la vitesse a pour effet d'augmenter l'amplitude et de diminuer la période de la réponse;
- l'allure des courbes est conservée. Cela veut dire que la réponse est de même nature;
- la durée de contact, définie à partir de la courbe d'évolution de la force de contact, présente de faibles variations. Pour un rapport de 2 entre les vitesses, nous obtenons un rapport d'environ 1.15 pour les durées de contact.

VI.1.2. Influence de la masse du projectile

La plaque isotrope a été modélisée en 4 couches. La variation de la masse est obtenue en faisant varier le rayon du projectile. Le rayon prend les valeurs 0.01m (valeur de référence), 0.005m et 0.0025m. La réponse globale est illustrée par les courbes des figures (2-a,b,c).





Nous constatons que:

- aussi bien l'amplitude que la période de la réponse dépendent de la taille du projectile. Une diminution du rayon et donc de la masse du projectile a pour effet de diminuer l'amplitude et la période de la réponse;
- nous obtenons le même type de réponse globale, puisque l'allure des courbes est conservée;
- lorsque le projectile est petit ($R=0.01/4m$), le projectile repart après contact avec une vitesse $\frac{dw_2}{dt}$ voisine de sa vitesse initiale. La plaque entre en très faibles vibrations. Lorsque le projectile est petit, le contact est donc parfaitement élastique.

Avec de tels projectiles, et avec des vitesses plus élevées, la plaque presque immobile peut être perforée par le projectile.

VI.1.3. Étude quantitative de l'influence de la vitesse et du rayon du projectile

Nous avons vu aux deux paragraphes précédents (§I.1 et §I.2), que lorsque la vitesse et le rayon (ou la masse) du projectile varient, nous obtenons les mêmes allures de courbe. Nous allons essayer dans ce paragraphe de quantifier les variations enregistrées.

a). Approche analytique simplifiée

Lorsque les vibrations produites par la collision peuvent être négligées, on peut écrire [W.E.Goldsmith (1960)]:

$$f = -m_2 \cdot \ddot{w}_2 = m_1 \cdot \ddot{w}_1$$

(Cela revient en fait à supposer toute la masse de la plaque concentrée au point de contact).

En dérivant deux fois la relation $\alpha = w_2 - w_1$, on obtient:

$$\ddot{\alpha} = -f \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Dans le cadre de la théorie de Hertz on a $f = k_c \cdot \alpha^{3/2}$, ce qui donne:

$$\ddot{\alpha} = -k_c \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \alpha^{3/2}$$

En posant $k_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ et en intégrant, on obtient:

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - V_0^2) = -\frac{2}{5}k_1 \cdot k_c \cdot \alpha^{5/2} \quad (6.1)$$

Le maximum d'indentation α_m a lieu lorsque s'annule la vitesse relative $\dot{\alpha} = 0$, ce qui donne:

$$\alpha_m = \left(\frac{5 \cdot V_0^2}{4 \cdot k_1 \cdot k_c} \right)^{2/5}$$

soit encore:

$$f_m = k_c \cdot \left(\frac{5 \cdot V_0^2}{4 \cdot k_1 \cdot k_c} \right)^{2/5} \quad (6.2)$$

Lorsque le contact est élastique (pas de déformations permanentes), les déformations sont réversibles, et la durée de contact est déterminée à partir de l'équation (6.1) par:

$$\tau_c = 2 \int_0^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{V_0^2 - \frac{4}{5} \cdot k_1 \cdot k_c \cdot \alpha^{5/2}}}$$

Cette intégrale est calculable par changement de variable $x = \frac{\alpha}{\alpha_m}$ et donne:

$$\tau_c = \frac{2.9432}{V_0^{1/5}} \left[\frac{5}{4 \cdot k_1 \cdot k_c} \right]^{2/5} \quad (6.3)$$

Par ailleurs, lorsque le projectile est assez petit, nous pouvons négliger sa masse m_2 devant celle m_1 de la plaque, de sorte que $k_1 \approx \frac{1}{m_2}$.

En écrivant que $k_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \sqrt{R}$ [W.E.Goldsmith (1960)], et en reportant les expressions de k_1 et k_c dans (6.2) et (6.3), on peut facilement établir que:

$$\begin{aligned} \tau_c &\text{ varie comme } \frac{1}{V_0^{1/5}} \text{ et comme } R \\ f_m &\text{ varie comme } V_0^{6/5} \text{ et comme } R^2 \end{aligned}$$

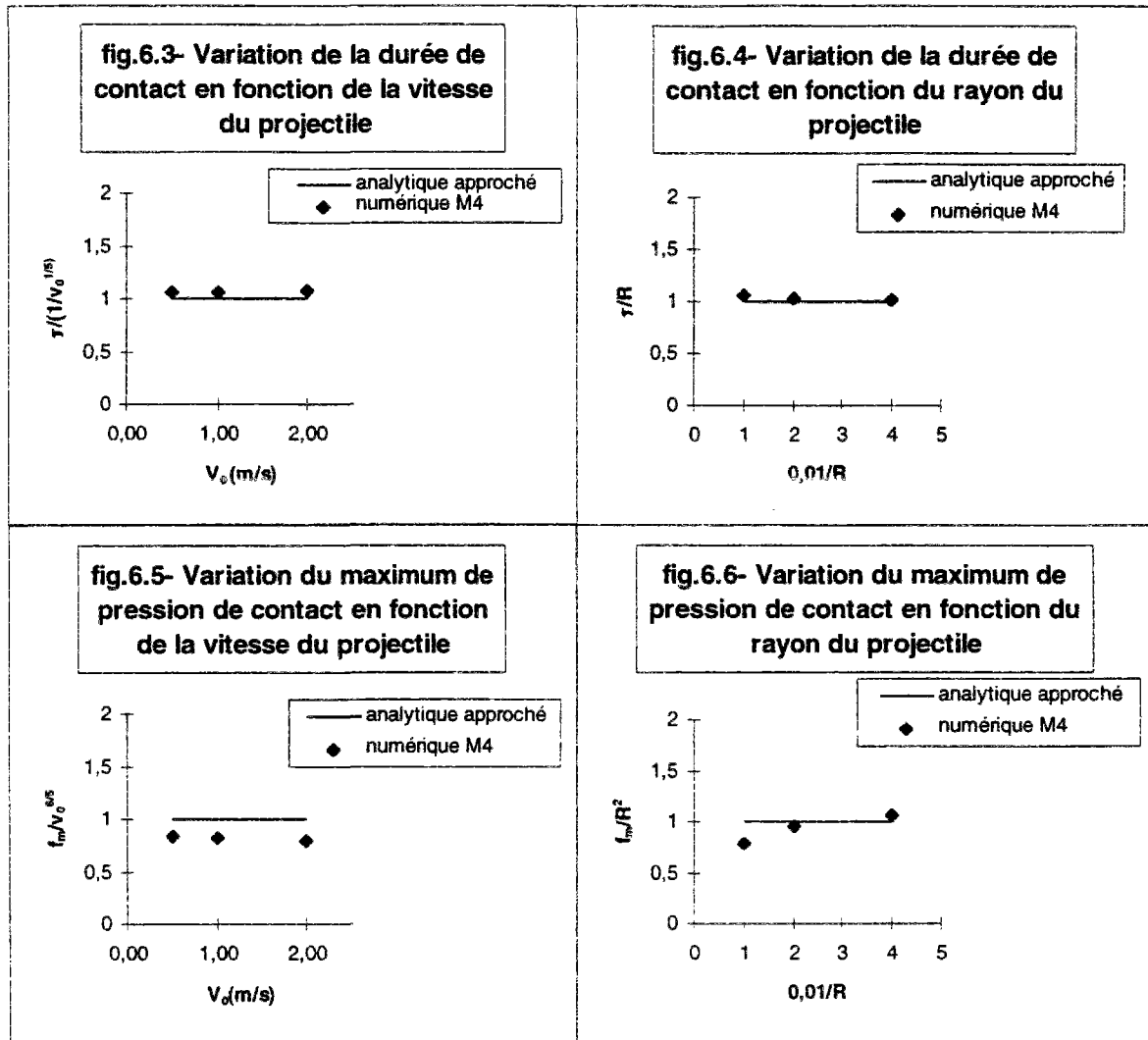
Ces résultats issus d'une analyse simplifiée, supposant certaines hypothèses simplificatrices, ne sont qu'approximatifs. Nous avons pu par exemple relever un écart de l'ordre de 23% sur le calcul de f_m entre le résultat obtenu par cette approche simplifiée et celui donnée par l'approche analytique de Karas (1939) (cf.V.3).

Néanmoins, nous allons essayer de voir si les rapports donnés constants par cette approche simplifiée le sont vraiment dans le cas général. C'est l'objet du prochain paragraphe.

b). Comparaison de l'approche numérique M4s et de l'approche analytique simplifiée

Pour différentes valeurs de V_0 , respectivement de R , nous avons calculé les rapports $\frac{\tau_c}{1/V_0^{1/5}}$ et $\frac{f_m}{V_0^{6/5}}$, respectivement $\frac{\tau_c}{R}$ et $\frac{f_m}{R^2}$, donnés constants par l'approche analytique simplifiée.

Les résultats ramenés au cas de référence $V_0=1\text{m/s}$ et $R=1\text{cm}$, sont illustrés par les figures (6.3-6.6).



Nous pouvons constater que:

- Sur la figure 6.6 le rapport $\frac{f_m}{R^2}$ présente des écarts de plus de 20% pour des valeurs différentes de R . La propriété de constance de ce rapport émise dans le cadre de l'approche analytique simplifiée n'est donc pas vérifiée. Il y a lieu d'effectuer les calculs avec d'autres valeurs de R avant de pouvoir déterminer les variations de f_m en fonction de R ;
- l'ensemble des trois autres rapports (courbes 6.3, 6.4 et 6.5) présentent des écarts très faibles, de sorte que nous pouvons dire que pour une plaque isotrope, et dans la gamme des vitesses et des masses que nous avons testées, la durée de contact τ_c

varie comme $\frac{1}{V_0^{1/5}}$ et comme R et que f_m varie comme $V_0^{6/5}$. L'établissement d'un tel lien entre τ_c d'une part et V_0 et R d'autre part, permet de rapprocher deux des méthodes de classification des impacts (cf. §III.1.1 et §III.1.2), l'une classique se basant sur la masse et la vitesse et l'autre, dite phénoménologique, faisant appel aux durées de contact.

VI.2. INFLUENCE DES PARAMÈTRES SE RÉFÉRANT A LA PLAQUE

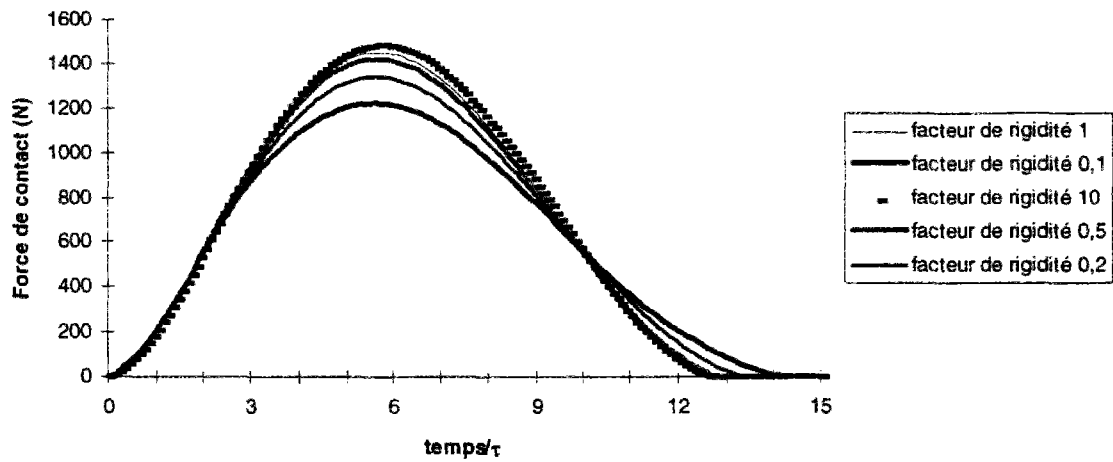
Plusieurs paramètres se rattachant à la plaque isotrope peuvent affecter la réponse globale: son épaisseur, les conditions aux limites imposées à ses bords latéraux, sa taille, et , exceptionnellement pour le M4, la rigidité qui caractérise ses interfaces.

VI.2.1. Influence de la valeur de la rigidité aux interfaces

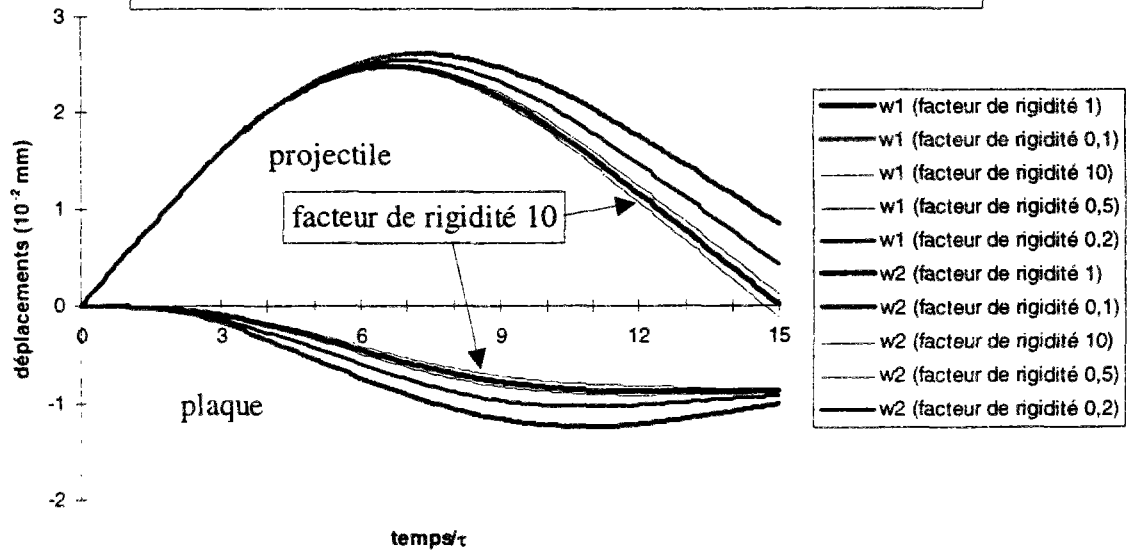
Lorsque nous modélisons par le M4 une plaque isotrope par des couches identiques, la rigidité de cisaillement d'interface est la même pour toutes les interfaces. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué ailleurs (cf I.2.2.), plusieurs démarches ont été envisagées pour le calcul de la valeur de ces rigidités. Pour l'instant nous effectuons nos calculs en nous basant sur la formule (1.45) du chapitre I. Nous avons alors, dans ce paragraphe, prévu des écarts par rapport à cette valeur de référence, pour évaluer l'influence que cela a sur la réponse globale de la plaque, et essentiellement sur la force de contact entre la plaque et le projectile.

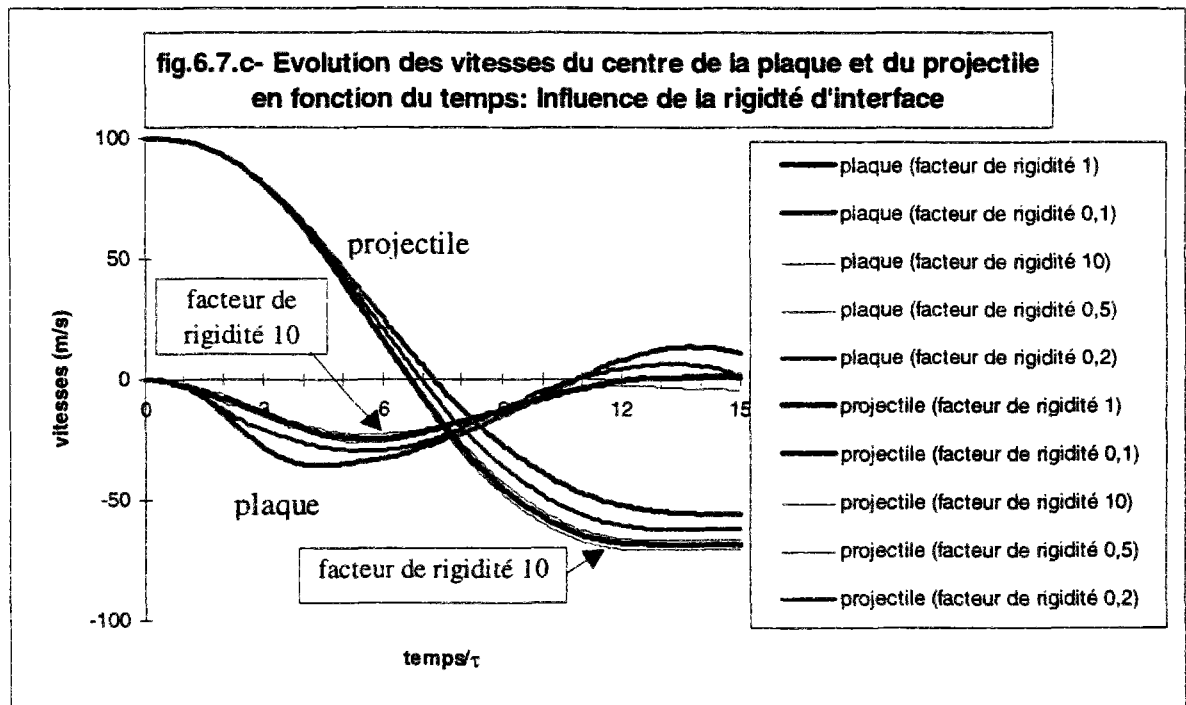
Les calculs numériques de ce paragraphe ont été effectués en modélisant la plaque isotrope en 2 couches et en 4 couches. Les résultats obtenus sont similaires. Ils sont illustrés par les courbes des figures (6.7-a,b,c).

**fig.6.7.a- Evolution de la force de contact en fonction du temps:
Influence de la rigidité d'interface**



**fig.6.7.b- Evolution des déplacements du centre de la plaque et du
projectile en fonction du temps: Influence de la rigidité d'interface**





Nous constatons alors que:

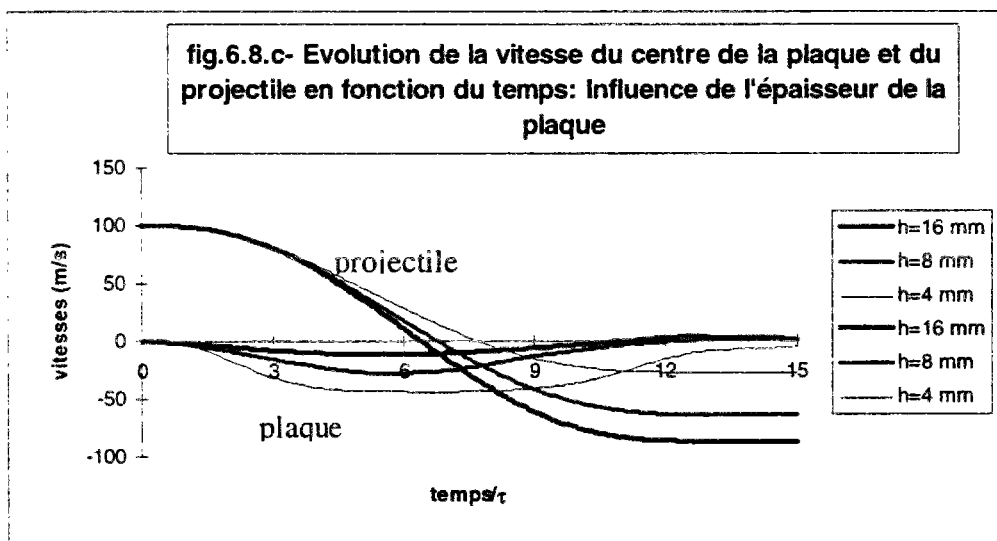
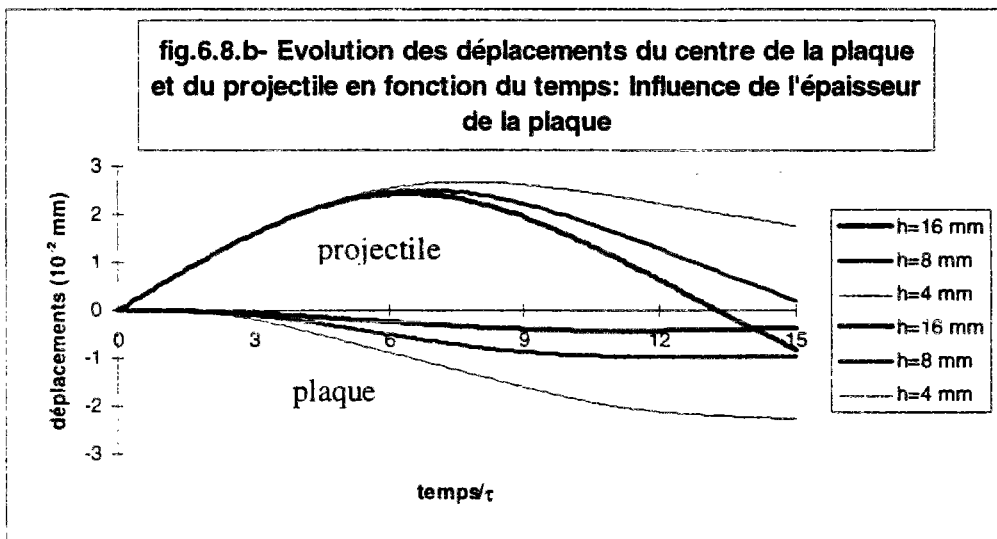
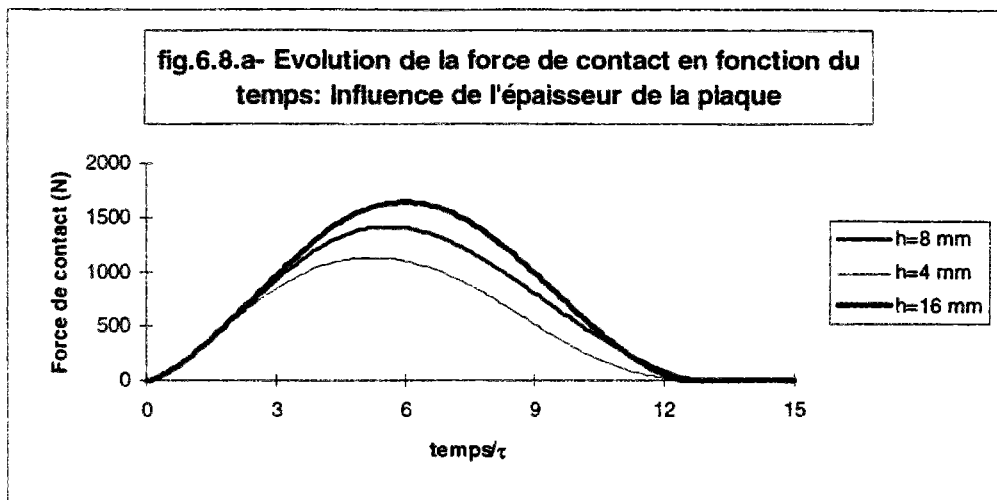
- comme prévu, la réponse globale varie avec la valeur de la rigidité de cisaillement d'interface, mais cette variation est faible;
- par rapport à la valeur de référence, le fait d'augmenter la rigidité à l'interface influe très peu sur la réponse globale;
- dans une gamme de rapports de $\frac{1}{2}$ à 2 par rapport à cette valeur, la réponse reste pratiquement la même;
- seule une diminution considérable (facteur 5) de la rigidité à l'interface a une influence considérable sur la réponse.

Au vu de ces résultats, et du fait que les autres démarches envisagées pour le calcul de ces rigidités à l'interface prévoient des écarts faibles par rapport à la valeur de référence (cf.I.2.2), nous pouvons conclure que le choix de la méthode de calcul de la rigidité d'interface a peu d'influence sur la réponse globale.

VI.2.2. Influence de l'épaisseur totale de la plaque

L'approche simplifiée du §I.3.1. prévoit, lorsque la masse m_2 du projectile est petite devant celle m_1 de la plaque, que le maximum f_m de la force de contact, ainsi que la durée τ_c du contact, sont indépendants de l'épaisseur totale h de la plaque. Ce résultat s'appuie essentiellement sur l'hypothèse que la plaque est assez épaisse pour que les vibrations produites par la collision puissent être négligées.

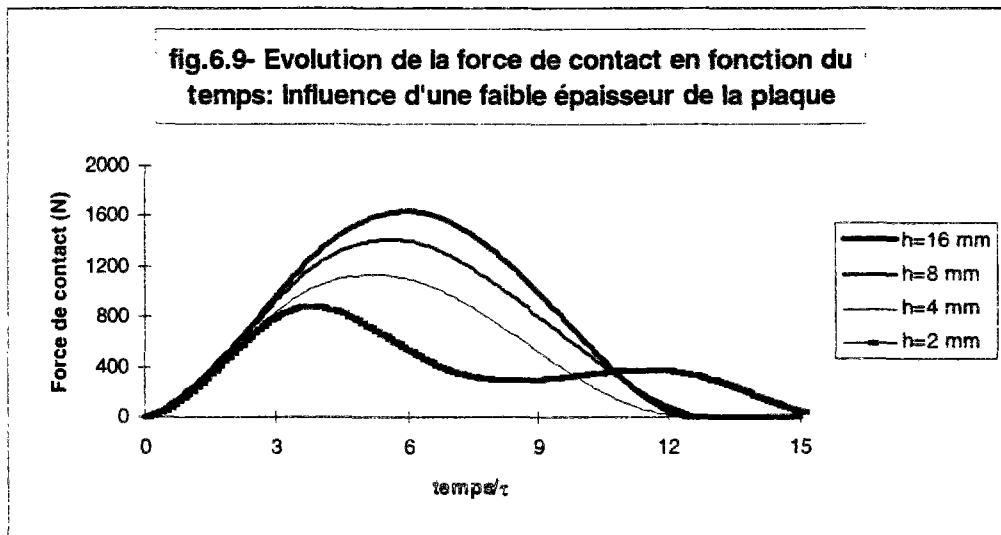
Nous allons ici faire varier l'épaisseur et voir si ces affirmations sont vérifiées dans le cas général. Les résultats obtenus pour trois valeurs différentes de l'épaisseur totale h de la plaque sont présentés figures (8.a,b,c).



Nous pouvons remarquer que la durée de contact, comme le prévoit l'approche analytique simplifiée, est pratiquement la même pour les trois valeurs de l'épaisseur.

Il n'en est cependant pas de même pour le maximum f_m de la force de contact.

Les résultats obtenus avec une épaisseur totale $h=2\text{mm}$ montrent (fig.9) que cette propriété d'indépendance de τ_c vis à vis de l'épaisseur n'est pas générale, mais concerne une certaine gamme d'épaisseurs, en dessous de laquelle nous ne pouvons plus négliger les vibrations dans l'épaisseur, ni la masse du projectile devant celle de la plaque.



L'allure de la courbe obtenue pour $h=2\text{mm}$ rappelle d'ailleurs le phénomène de contact multiple (cf.VII.4.1).

En fait, en analysant plus en détail les trois premières courbes, nous remarquons que, l'instant $\tau_{c/2}$ auquel la force de contact atteint son maximum f_m diminue avec l'épaisseur, alors que l'hypothèse de réversibilité des déformations le donne constant.

Nous remarquons enfin (fig.6.8b) que le fait de diminuer l'épaisseur augmente l'amplitude du déplacement w_1 de la plaque.

VI.2.3. Influence du type de conditions aux limites imposées

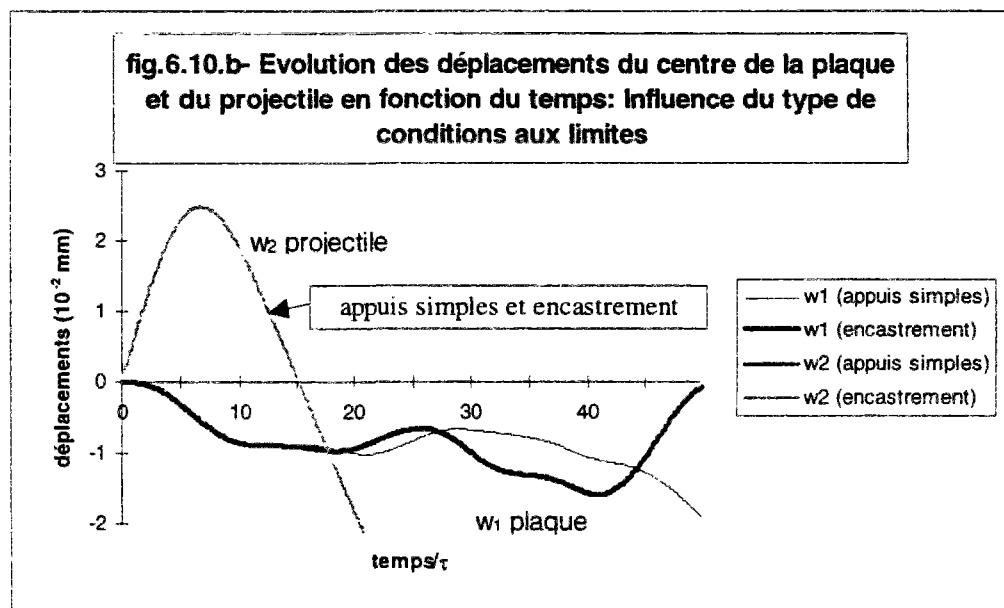
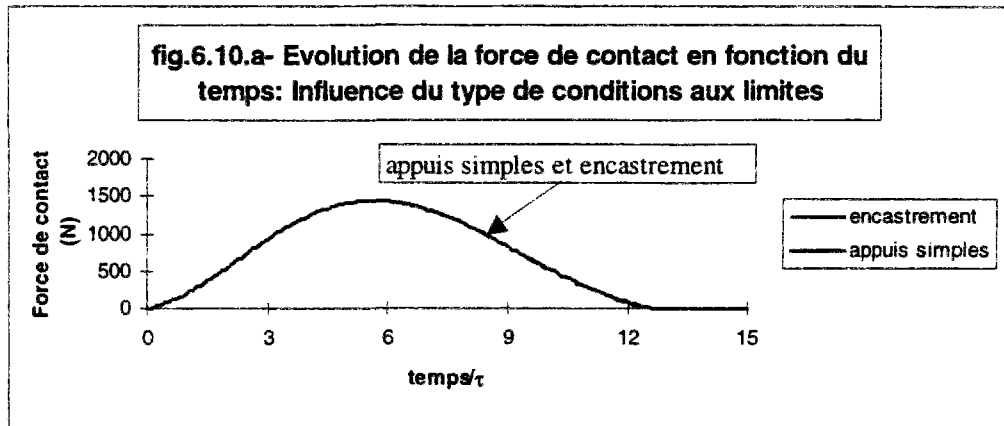
La plupart des problèmes d'impact que l'on rencontre en pratique peuvent être modélisés par l'impact transverse d'un projectile de petite dimension sur une plaque encastree ou simplement appuyée aux bords.

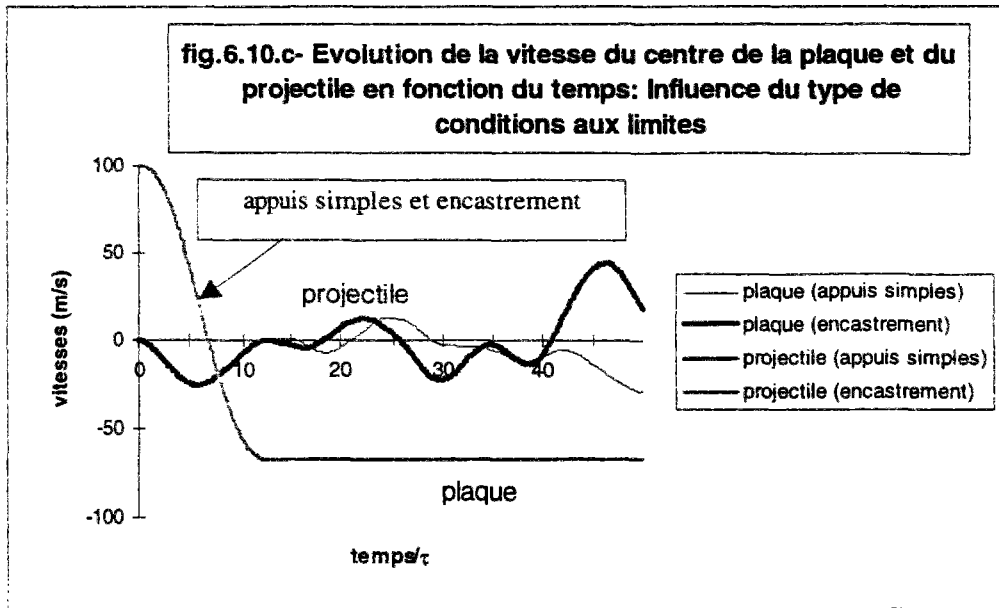
La validation du code éléments finis (chapitre V) a été entreprise sur une plaque sur appuis simples. Nous allons dans ce paragraphe modifier ces conditions aux

limites aux bords, en remplaçant l'appui simple par un encastrement, et regarder l'effet obtenu au niveau de la réponse globale.

Les données du problème calculé sont par ailleurs identiques au problème de référence (§V.2). La plaque isotrope a été cette fois-ci modélisée en trois couches identiques.

Les résultats sont illustrés par les figures (6.10.a,b,c).





Ces figures se prêtent à quelques commentaires:

- le type de conditions aux limites imposées n'affecte pas la réponse au début de l'événement impact. Les ondes dans la plaque n'ont en effet pas encore eu le temps de se réfléchir sur les bords latéraux et de revenir au point d'impact. Comme nous l'avons mentionné ailleurs (§III.4.2), dans une plaque élastique isotrope mince et infinie, deux ondes se propagent:

- une onde longitudinale avec une célérité $c = \left(\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/2}$, qui se réfléchit sur

les bords latéraux et revient au point d'impact après une durée que nous avons évaluée à environ 6.5τ après le début de l'impact. Au vu des courbes, cette onde n'a apparemment que peu d'effet sur la réponse globale;

- une onde de flexion plus lente, à vitesse décroissante, qui devrait en principe être dominante. Sur les courbes précédentes, l'effet de cette onde commence à paraître après une durée d'environ 12τ . Son effet est alors différent suivant son mode de réflexion, ou encore suivant que la plaque est encastree ou en appuis simples;

- le contact entre la plaque et le projectile ayant lieu pendant la première phase, avant que l'onde de flexion ne revienne influencer la réponse au point d'impact, la courbe de variation de la force de contact est peu affectée par le type de conditions aux limites imposées aux bords. Il en est de même pour le déplacement et la vitesse du projectile, puisque ce dernier quitte définitivement la plaque avant que l'effet des ondes de flexion ne devienne appréciable. Il n'en serait sûrement pas de même si le contact avait été multiple.

VII. EXEMPLE D'ÉTUDE PAR LE M4S D'UN PROBLÈME D'IMPACT SUR PLAQUES MULTICOUCHES

En première partie, après la présentation et la formulation du M4s dans les premiers chapitres, les calculs effectués en statique ont permis d'entrevoir les possibilités qu'offrait le modèle quant à l'accès facile à des informations précises et très utiles au niveau des interfaces. A partir de là, nous avons entrepris de développer le modèle M4s en dynamique, dans l'optique de calculer des problèmes d'impact.

L'objectif de la deuxième partie était de préparer le champ à ce calcul. En nous appuyant sur les résultats bibliographiques, nous avons pu ainsi établir et construire un algorithme de calcul dynamique, que nous avons validé en traitant un problème d'impact sur une plaque isotrope.

Le code éléments finis est ainsi validé. Il s'agit à présent de le mettre en oeuvre. L'exemple que nous choisissons d'étudier est celui de l'impact d'un projectile cylindrique sur une plaque multicouche [0₅/90₅/0₅].

A partir de cet exemple, il s'agit de mettre en évidence la capacité du modèle M4s à accéder de manière rapide et efficace à l'information au niveau des interfaces, ces informations devant être ensuite analysées et reliées au phénomène de délaminage.

Pour pouvoir calculer le problème choisi, certains choix de paramètres de modélisation doivent être effectués. Ce sera l'objet du premier paragraphe (VII.1).

Une fois ces choix faits, le code éléments finis sera mis à l'oeuvre pour l'étude de la plaque [0₅/90₅/0₅]. Les résultats des calculs seront ensuite analysés et reliés à trois aspects du phénomène de délaminage: son initiation (§VII.2.1), sa propagation (§VII.2.2) et son étendue (§VII.2.3).

VII.1. IDENTIFICATION ET INFLUENCE DES PARAMETRES DE MODELISATION DE L'EXEMPLE D'ÉTUDE

Nous commençons par définir le problème que nous allons étudier (§VII.1.1): les données se référant au projectile, à la plaque et aux conditions de l'impact.

Avant de traiter ce problème, et en nous aidant des résultats du chapitre précédent, nous allons identifier la valeur de certains paramètres de modélisation: les différents coefficients intervenant dans la loi de contact (§VII.1.2) et la prise en compte des conditions aux limites.

Une fois tous ces paramètres identifiés, le code éléments finis peut être utilisé. Nous comparerons alors la réponse globale qu'il fournit à celle obtenue expérimentalement.

VII.1.1. Le problème étudié

Comme nous l'avons déjà dit, peu de résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature. Nous allons axer nos comparaisons sur les multiples travaux expérimentaux publiés par l'équipe de l'université de Floride et essentiellement par *Takeda et col. (1980, 1981.a-b, 1982)*.

L'exemple d'étude est celui d'une plaque constituée de 15 couches $[0_5/90_5/0_5]$ encastrée le long de ses quatre bords. Cet empilement a été étudié expérimentalement par *Takeda et col. (1980, 1981a, 1982...)* et a fait l'objet de plusieurs études numériques [*B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)...*].

La plaque est carrée de 14 centimètres de côté. Son épaisseur totale vaut $h=4.29\text{mm}$.

Le pli élémentaire est en graphite-epoxy. Il présente les caractéristiques mécaniques suivantes [*B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988)*]:

E_1	40 GPa
E_2	8.27 GPa
$G_{12}=G_{13}$	4.13 GPa
G_{23}	3.03 GPa
ν_{12}	0.25
ρ	1901.5 kg/m ³

Le projectile est cylindrique en acier. Il présente les caractéristiques suivantes [*B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988)*]:

diamètre $2R$	0.9525 cm
longueur L	2.54 cm
masse m_2	0.01417 kg

Au départ, nous choisissons une vitesse initiale de 22.6m/s.

Le maillage est celui utilisé pour le calcul de la plaque isotrope du chapitre précédent (cf.fig.5.3).

VII.1.2. Identification des paramètres de la loi de contact

Nous avons résumé dans la synthèse bibliographique (§III.3.2.) le résultat des travaux expérimentaux menés par *Yang et Sun (1982)* pour l'établissement de lois de contact reliant la force F à l'indentation α .

Nous allons largement utiliser les résultats de ces travaux sur les lois de contact.

Toutefois, les conditions du problème que nous étudions ici diffèrent sur certains points des conditions adoptées par Yang et Sun. Les différences essentielles concernent les vitesses d'impact et les empilements utilisés. Ces différences peuvent nous amener à modifier certaines des expressions qu'ils ont proposées avant de les utiliser.

La première modification à apporter concerne le coefficient de contact k_c . Vu la faible valeur des vitesses d'impact dans leurs expériences, Yang et Sun ont pu construire leur analyse sur l'hypothèse d'existence d'une certaine équivalence entre les tests d'indentation statiques et les tests d'indentation en dynamique. C'est sur la base de cette hypothèse qu'ils ont pu établir l'expression du coefficient de contact k_c pendant la phase de chargement:

$$k_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^{1/2}}{\frac{(1-\nu_s^2)}{E_s} + \frac{1}{E_y}}$$

Cette hypothèse peut être acceptée pour les chocs à faible vitesses. Cependant, lorsque comme ici, nous nous plaçons dans un cadre de dynamique rapide, cette hypothèse n'est généralement plus vérifiée.

Nous devons alors identifier autrement la valeur de k_c . Cela fera l'objet du premier point de ce paragraphe.

Par ailleurs, certains des coefficients intervenant dans la loi de contact qu'ils ont établie pour les phases de décharge et de rechargement, dépendent de l'empilement. Le fait qu'ils aient utilisé un empilement $[0/45/0/-45/0]_{2s}$ différent de celui que nous étudions ici, nous amène à procéder à une nouvelle identification de ces coefficients. Il s'agira notamment de l'indentation critique α_{cr} et du coefficient de contact k_1 (définis en III.3.2.). Ce sera l'objet du deuxième point de ce paragraphe.

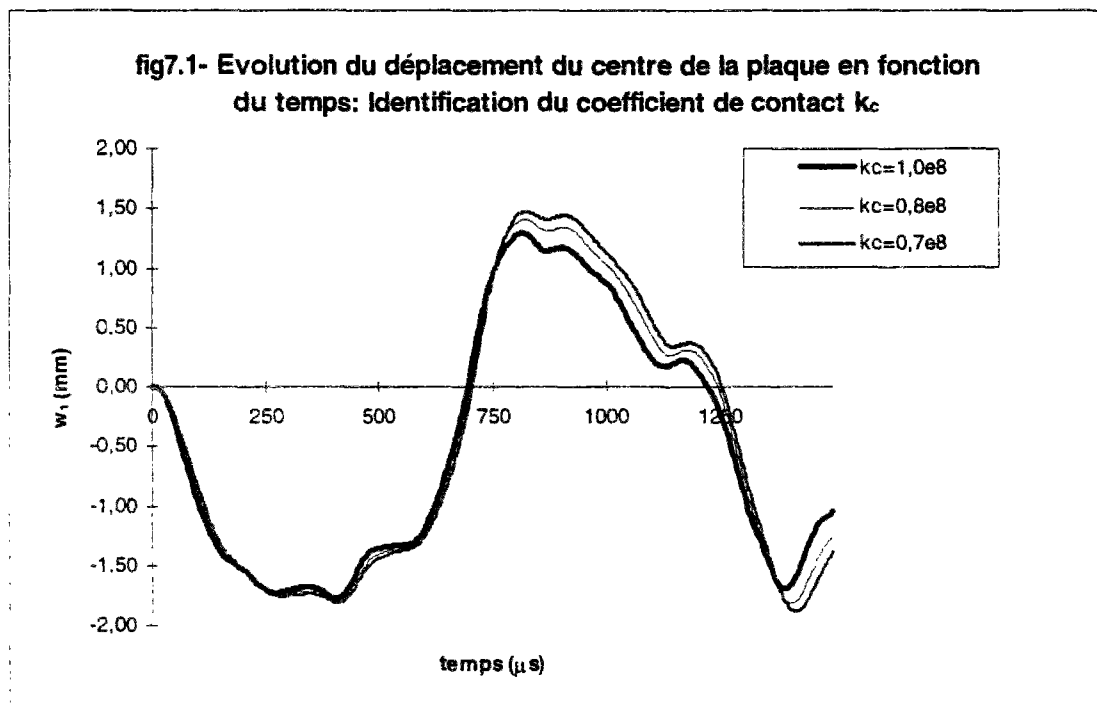
a) Identification du coefficient de contact k_c en phase de chargement

Nous ne disposons pas d'une valeur du coefficient de contact k_c déterminée expérimentalement en dynamique rapide. Nous allons alors essayer de déterminer numériquement cette valeur.

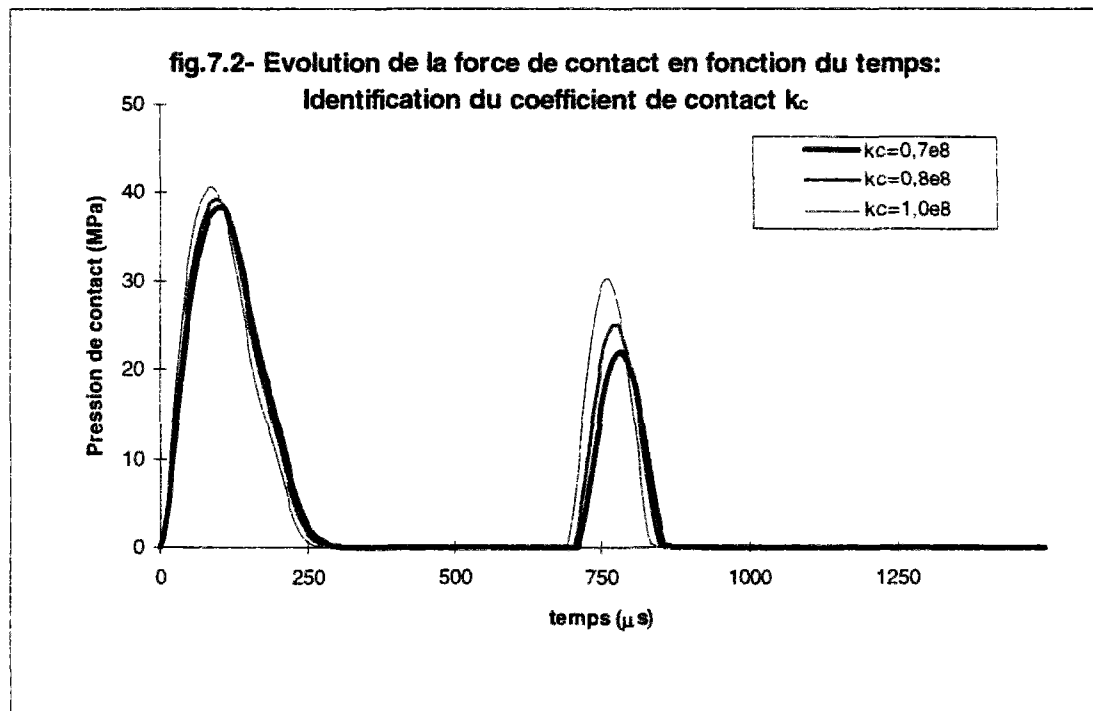
Pour cela, nous partirons de la valeur $k_c=10^8 \text{ N/m}^{3/2}$ utilisée dans des études numériques pour résoudre des problèmes similaires au notre [B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)]. Nous allons ensuite faire varier k_c autour de cette valeur et relever la sensibilité de la réponse globale en force et déplacement. Cela permettra d'identifier approximativement k_c .

Nous nous intéresserons essentiellement à la phase de chargement, puisque la loi en décharge ne sera tout à fait identifiée qu'au point suivant. Pour l'instant, nous conservons une loi en puissance $3/2$ pour cette phase.

Sur les figures 7.1 et 7.2, nous avons reporté l'évolution en fonction du temps de la flèche au centre de la plaque et de la force de contact, pour des valeurs de k_c égales à $0.7 \cdot 10^8$, $0.8 \cdot 10^8$ et $10^8 \text{ N/m}^{3/2}$.



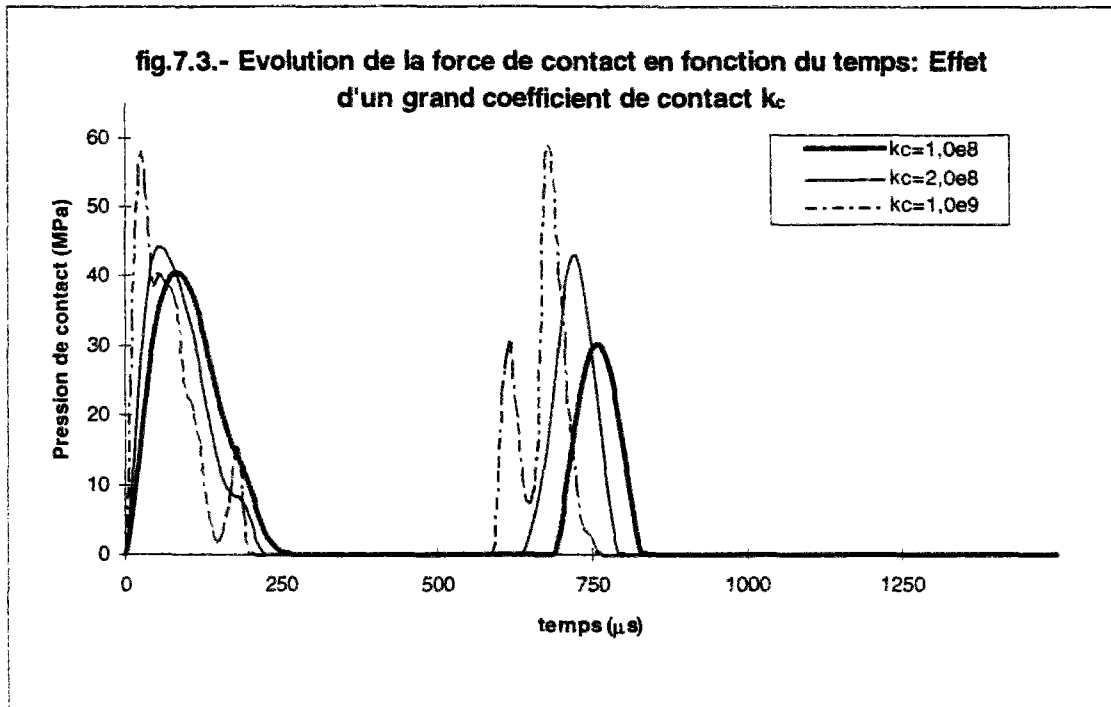
La figure 7.1 montre que la flèche est peu sensible à une faible diminution de k_c . Ce résultat a d'ailleurs été rapporté par Petersen (1985).



Pour la force de contact, l'amplitude et la durée de la phase de chargement sont également peu sensibles à cette variation de k_c lors du premier contact (fig.7.2).

Sur la figure 7.3, nous avons reporté l'évolution en fonction du temps de la force de contact pour des valeurs de k_c égales à 10^8 , $2 \cdot 10^8$ et 10^9 N/m^{3/2}. Cette figure montre que pour les grandes valeurs de k_c , la réponse en termes de force de contact n'est pas très sensible.

Pour les très grandes valeurs de k_c (10^9 par exemple) des instabilités numériques commencent à apparaître. Ce phénomène d'instabilité a été observé par *Petersen (1985)* lors d'un calcul éléments finis tridimensionnels à partir d'une valeur $k_c = 1.5 \cdot 10^8$ N/m^{3/2}. Le présent code éléments finis présente donc moins d'instabilité numérique.



Au vu de ces résultats, nous pouvons conclure que la réponse globale est peu sensible à des variations non excessives du coefficient de contact k_c , et qu'il est tout à fait légitime d'utiliser pour notre calcul une valeur approchée de k_c . Nous nous contentons alors de la valeur $k_c = 10^8 \text{ N/m}^{3/2}$.

Notons enfin, que malgré l'utilisation d'une loi en puissance $3/2$ en décharge, nous avons constaté que la réponse globale reste assez proche de celle calculée numériquement par des travaux qui adoptent cette même loi en décharge [B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)]. La loi en puissance $3/2$ en décharge n'est donc pas une très mauvaise approximation. Nous essayerons toutefois au prochain point d'améliorer la précision du contact, en adoptant une loi en puissance $5/2$ tenant compte des déformations permanentes qui apparaissent.

b) Identification des coefficients intervenant dans la loi d'indentation en décharge et en phase de rechargement

Certains des travaux numériques dont nous disposons [B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988)] se contentent d'une loi en décharge simple en puissance $3/2$. C'est cette loi que nous avons utilisée pour les calculs du paragraphe précédent. Elle a d'ailleurs fourni des résultats proches des résultats numériques de ces travaux [B.R.Petersen (1985), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)].

Or, comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, une loi d'indentation en décharge en puissance $5/2$ semble être indiquée par les travaux de Yang et Sun (1982).

Yang et Sun ont proposé l'expression (3.4):

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q \quad \text{en phase de décharge}$$

et l'expression (3.5):

$$F = k_1 \cdot (\alpha - \alpha_0)^{3/2}$$

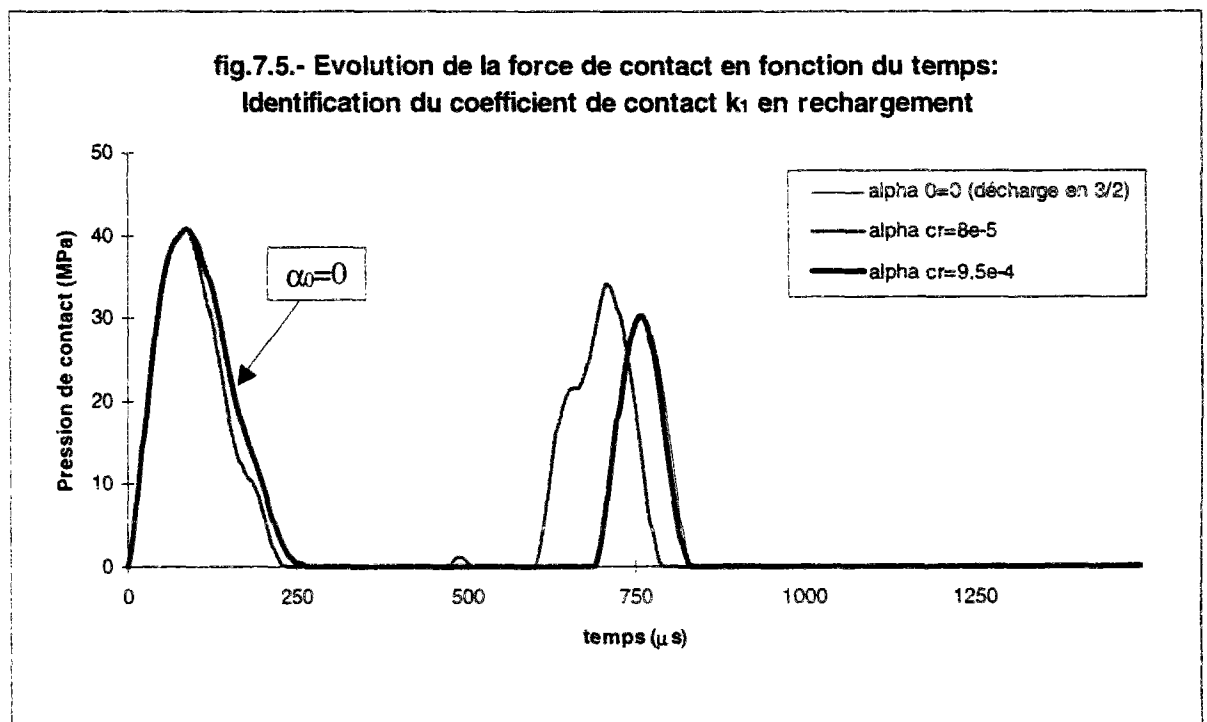
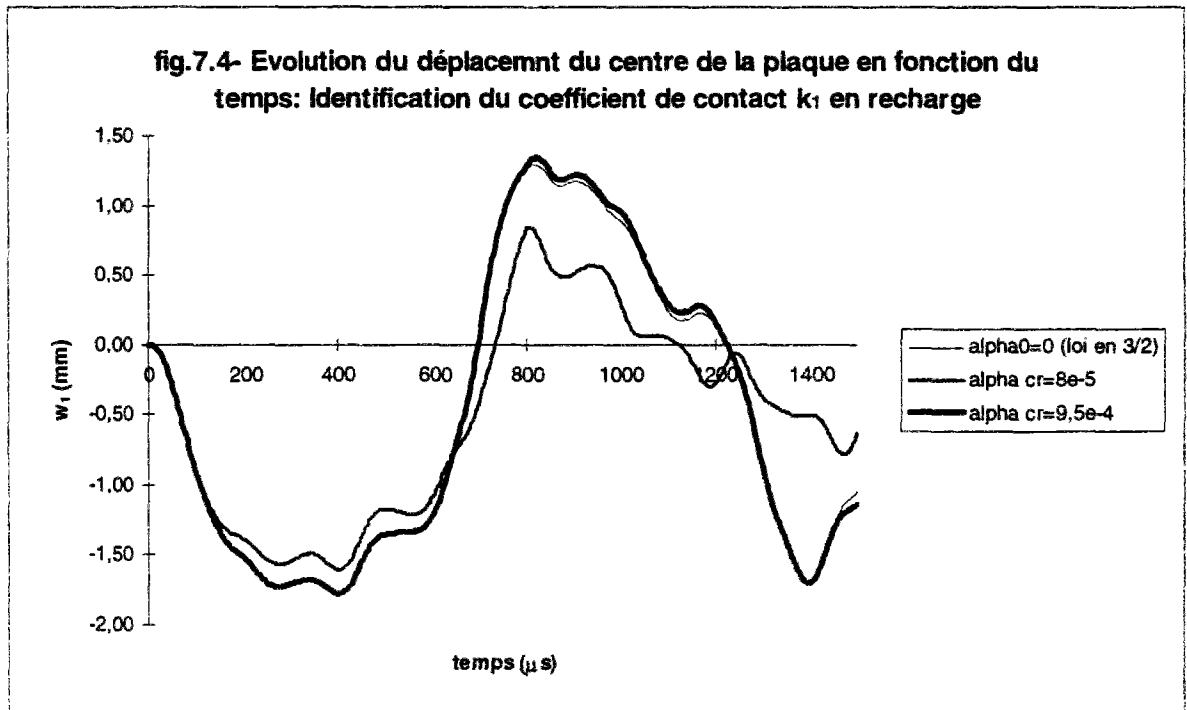
$$\text{avec} \quad k_1 = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}} \quad \text{en phase de rechargement.}$$

Pour pouvoir utiliser ces expressions, nous avons besoin de connaître deux données expérimentales spécifiques à la structure étudiée:

- le coefficient de contact k_1 qui apparaît dans la loi en phase de rechargement (défini en III.3.2);
- un coefficient α_{cr} dit d'indentation critique, qui sert à déterminer l'indentation permanente α_0 figurant ci-dessus.

Dans leurs travaux, Yang et Sun ont étudié une plaque dont la séquence d'empilement $[0/45/0/-45/0]_{2s}$ est différente de celle $[0/90/0]$ de la plaque que nous étudions ici, le matériau constituant les plis élémentaires étant le même dans les deux cas. Nous avons alors testé la valeur $\alpha_{cr}=8*10^{-5}$ utilisé par *Yang et Sun* (1982).

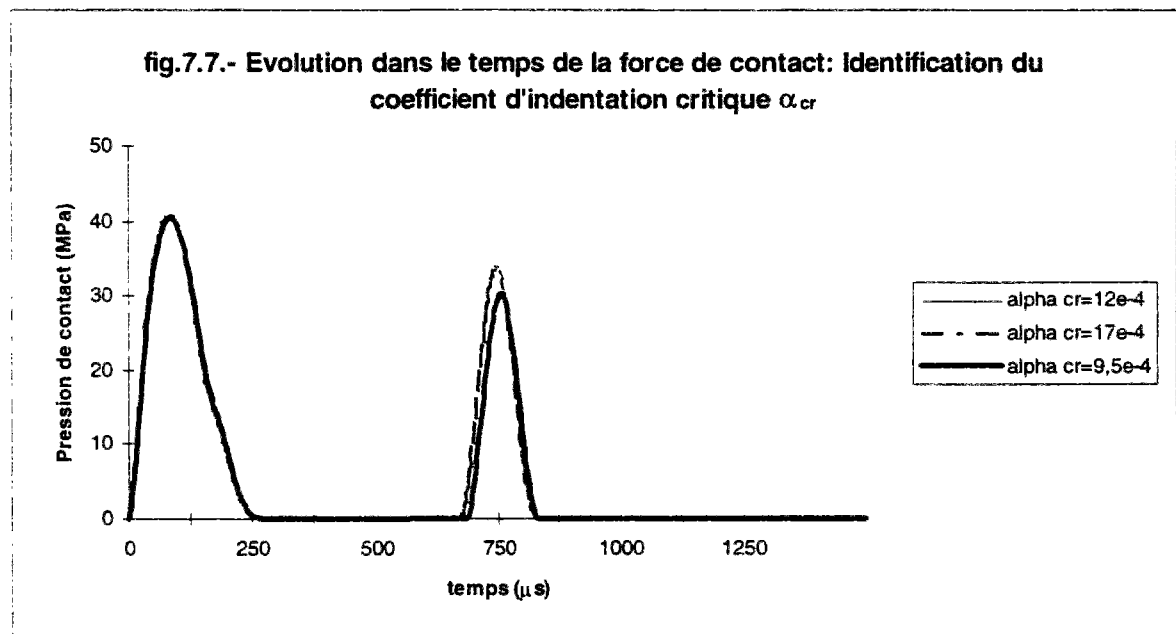
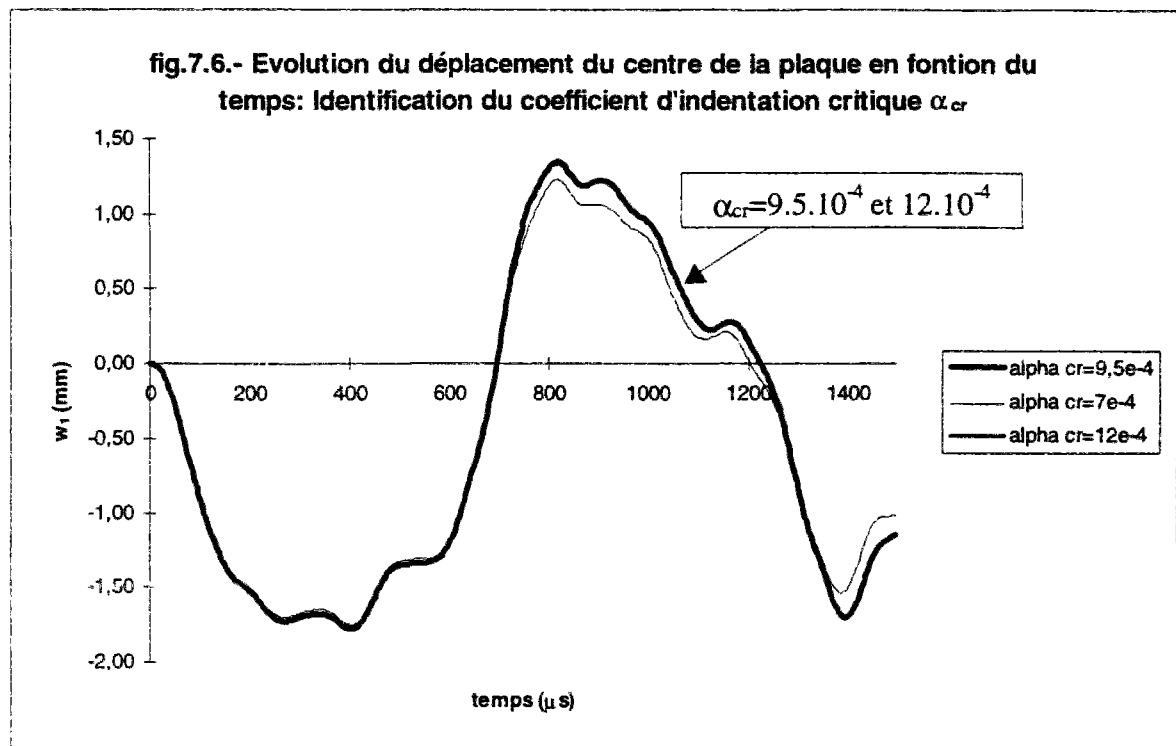
Le choix de cette valeur $\alpha_{cr}=8*10^{-5}$ affecte considérablement la réponse globale en fournissant des écarts considérables avec le résultat des calculs précédents (fig.7.4,7.5).



De plus, la valeur de k_1 est dans ce cas largement plus grande que celle de k_c (rapport de près de 100), alors que l'on s'attend à ce qu'elle en soit proche (cf.III.3.2). La valeur de α_{cr} ne dépend donc pas seulement du matériau mais aussi de l'empilement utilisé. Nous allons alors essayer de l'identifier numériquement.

Pour cela, nous avons testé une valeur $\alpha_{cr}=9.5 \cdot 10^{-4}$ de façon à assurer au coefficient k_1 une valeur proche de celle de k_c . Dans ce cas, la réponse calculée est plus réaliste. Elle présente peu d'écarts par rapport au calcul sans déformations permanentes (fig.7.4,7.5).

Nous avons ensuite essayé de calculer la réponse globale pour plusieurs valeurs de α_{cr} autour de la valeur $9.5 \cdot 10^{-4}$. Les figures 7.6 et 7.7 représentent l'évolution dans le temps de la flèche au centre de la plaque et de la force de contact, pour les valeurs $\alpha_{cr}=7 \cdot 10^{-4}$ et $\alpha_{cr}=12 \cdot 10^{-4}$.



Ces figures montrent qu'une légère variation dans la valeur de α_{cr} ($\pm 25\%$), a peu d'influence sur la courbe de décharge. Cela a d'ailleurs été mentionné par Yang et Sun (cf.III.3.2).

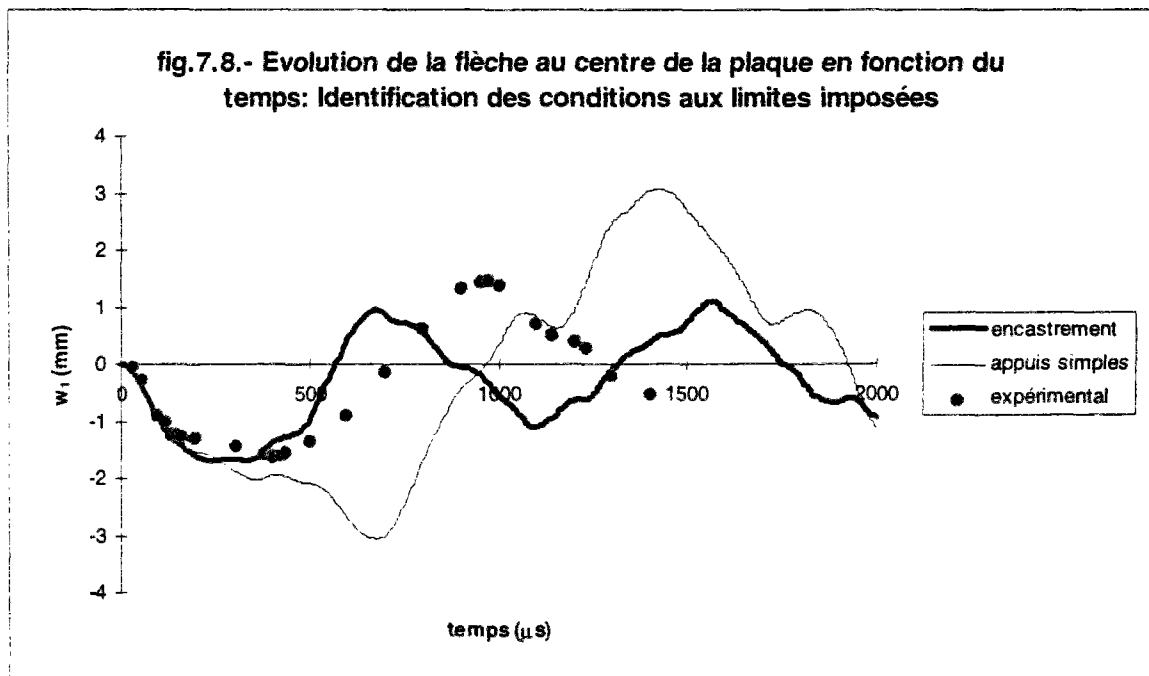
La réponse globale est donc peu sensible aux faibles imprécisions sur α_{cr} , tant que la valeur choisie est proche de la valeur réelle.

Nous pouvons donc adopter une valeur approximative de α_{cr} . Pour le reste de l'étude, nous fixons α_{cr} à $10 \cdot 10^{-4}$.

La loi de contact se trouve ainsi définie.

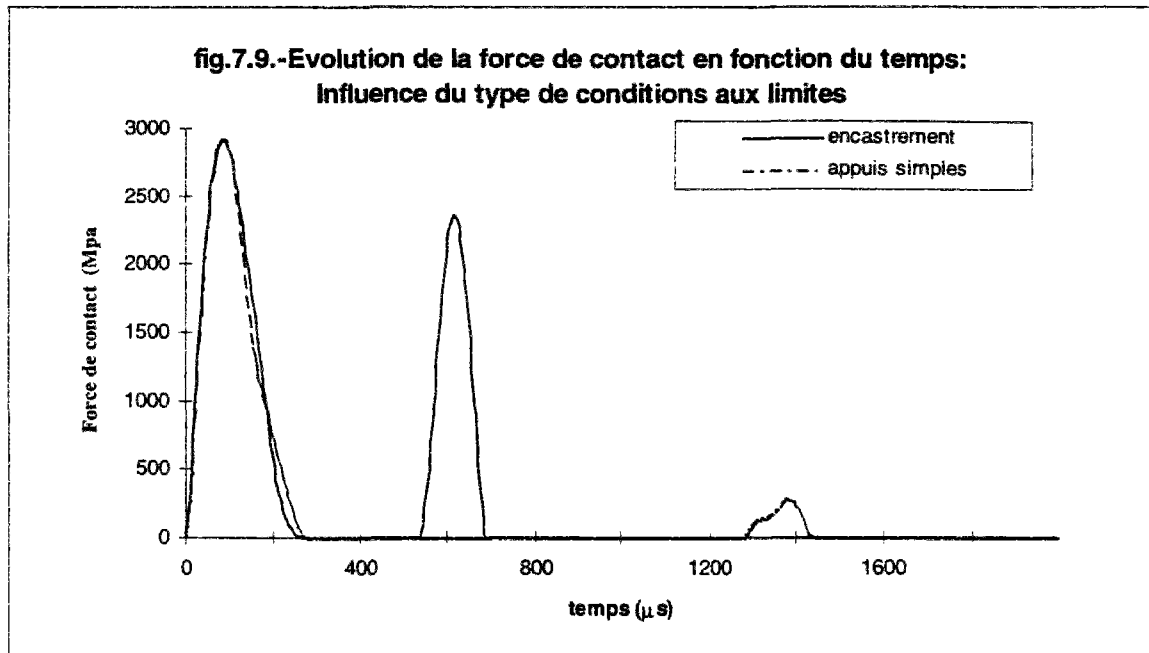
VII.1.3. Identification des conditions aux limites expérimentales imposées

Comme nous l'avons rapporté dans la synthèse bibliographique, il est impossible lors de tests d'impact, de reproduire parfaitement des conditions d'encastrement. La plaque est en effet autorisée, au droit de ces supports, à se déplacer horizontalement et aussi à tourner quelque peu, de sorte que le point effectif d'encastrement se trouve être quelque part à l'intérieur du châssis d'encastrement. Les conditions expérimentales d'encastrement font que la plaque est en fait dans une situation intermédiaire entre l'appui simple et l'encastrement parfait. La figure 7.8 illustre bien cela.



Nous pouvons en effet y remarquer que la courbe expérimentale passe, au moins pendant les premières phases de l'impact, entre les deux autres courbes.

Pour la courbe représentant la force de contact, nous enregistrons peu de variation pour le premier contact entre les deux cas de conditions aux limites (fig.7.9).



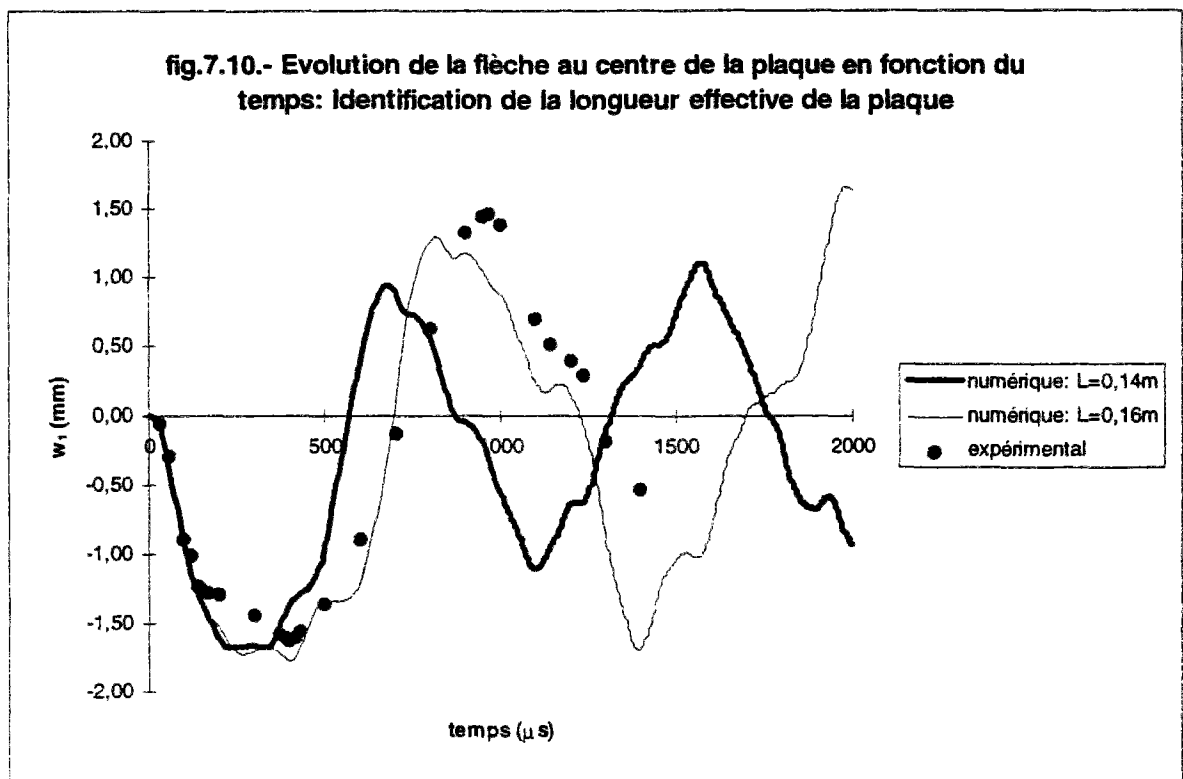
Par contre, lorsque l'appui est simple, le deuxième contact est enregistré avec un retard de 700μs et une amplitude beaucoup plus faible.

Les conditions aux limites peuvent donc changer la nature de la réponse. Il est de ce fait important d'essayer de reproduire avec précision la réalité des conditions aux limites pour espérer obtenir une réponse réaliste.

Pour cela, nous avons entrepris les calculs non pas avec la longueur réelle $a=0.14\text{m}$, mais avec une longueur de plaque légèrement plus grande, qui mesure la distance entre les deux points effectifs d'encastrement.

Certains travaux dont nous disposons [H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989)] affirment qu'une longueur effective $L=0.16\text{m}$ est la plus proche de la réalité des conditions d'encastrement.

Avec cette valeur, nous calculons une flèche au centre de la plaque proche de celle enregistrée expérimentalement (fig.7.10).



C'est cette valeur que nous retenons pour la suite.

La réponse numérique obtenue avec cette valeur est très proche de la réponse expérimentale; la validation de la réponse globale est pratiquement établie.

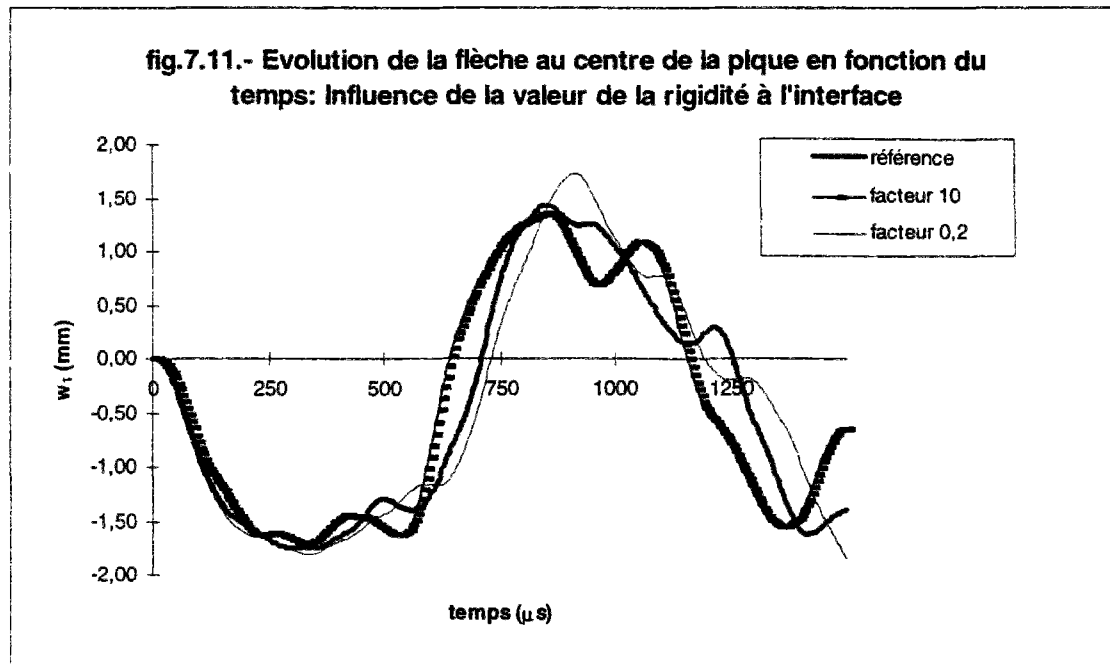
Il reste maintenant à vérifier, comme dans le chapitre précédent, que la réponse n'est pas très sensible aux autres paramètres tels que la rigidité d'interface.

VII.1.4. Influence de la valeur de la rigidité d'interface

Comme nous l'avons mentionné lors de l'étude de la plaque isotrope, la démarche de calcul des termes de rigidité à l'interface n'a pas encore été arrêtée. Entre les valeurs données par les différentes démarches des écarts peuvent exister dans un rapport de 1 à 1.5 environ. Le choix de l'une ou l'autre de ces démarches ne change rien quand à la philosophie et aux performances du modèle M4s, mais peut affecter quelque peu l'amplitude des réponses calculées.

Pour nous assurer qu'en choisissant l'une ou l'autre des démarches la réponse n'est pas très affectée, nous avons prévu des écarts par rapport à la valeur de référence (donnée par la formule (1.45)), avec laquelle nous avons travaillé jusque là, et ceci dans un rapport variant de 0.2 à 10.

Quelques résultats sont rapportés figure 7.11.



Nous remarquons d'abord, comme cela a été le cas en isotropie, que le fait de choisir une rigidité plus grande à l'interface affecte peu la flèche w_1 . Le cas illustré est celui d'une rigidité 10 fois plus grande.

Le fait par contre de choisir une rigidité plus faible peut affecter de façon non négligeable la réponse globale (cas d'un facteur 0.2).

Nous pouvons toutefois estimer, comme en isotropie, et compte tenu de l'ensemble des résultats que nous avons par ailleurs enregistrés, que dans un rapport de 0.5 à 2, la réponse globale change peu, et cela durant une bonne partie du phénomène impact (jusqu'à 800 μs).

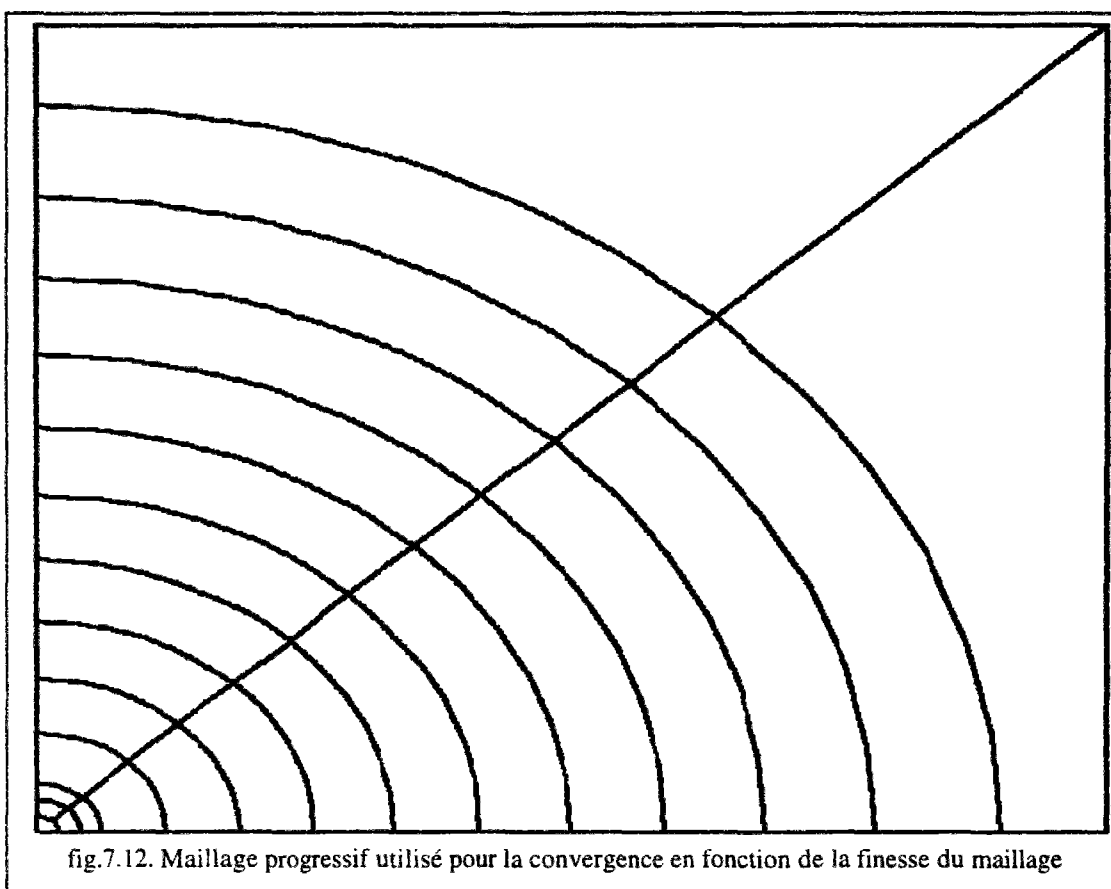
Le choix de l'une ou l'autre des démarches d'identification des rigidités aux interfaces n'est donc pas très important au niveau du calcul de la réponse globale.

VII.1.5. Influence de la finesse du maillage utilisé

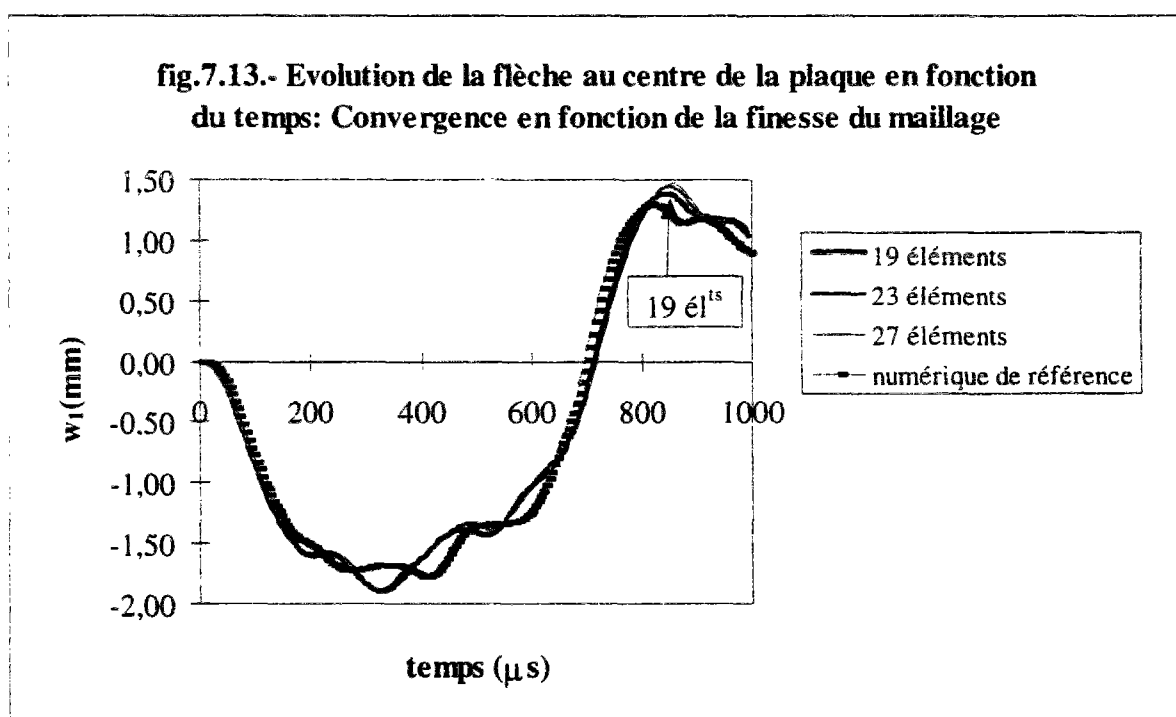
Les calculs du paragraphe précédent ont permis de retrouver numériquement les résultats expérimentaux, et de valider la réponse globale de la plaque orthotrope.

Dans ce paragraphe nous allons faire varier la finesse du maillage et observer la précision des calculs. Il s'agit de montrer la convergence des résultats lorsque la finesse du maillage augmente.

Cela permettra aussi de mettre en évidence la rapidité de calcul de notre code éléments finis.

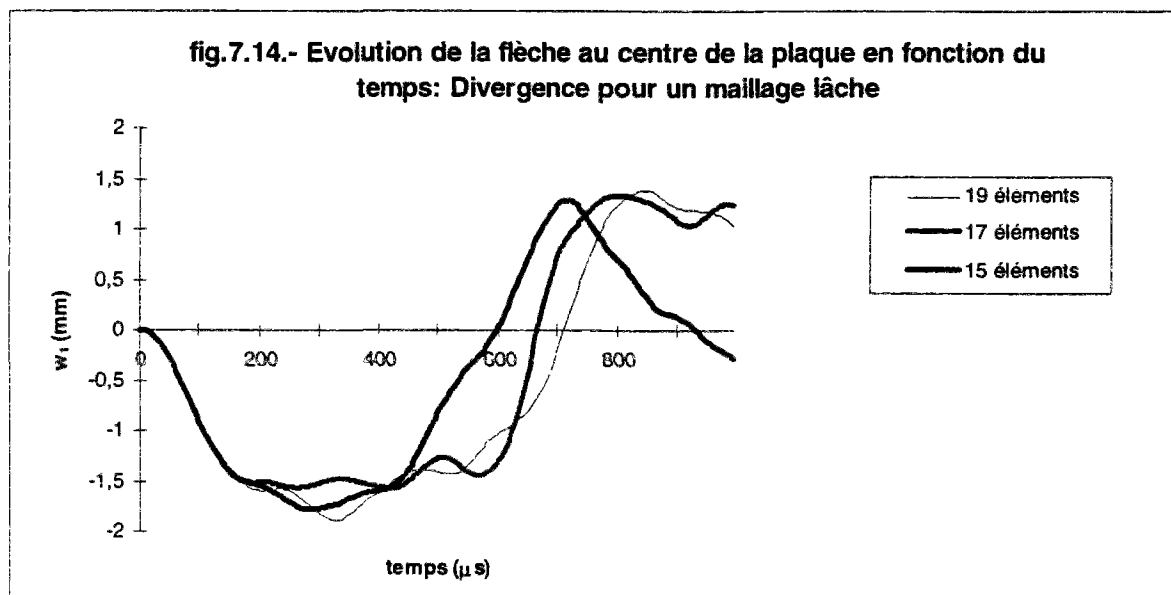


Sur la figure 7.13, nous avons rapporté les flèches que nous obtenons pour des maillages de même type, respectivement à 19, 23 et 27 éléments (fig.7.12). Le maillage de référence (avec lequel nous avons validé la réponse globale) a 29 éléments, mais n'est pas de même type (fig.5.3.).



La figure 7.13 montre que le type de maillage utilisé peut avoir un effet sur la flèche au centre de la plaque (forme de la courbe d'évolution entre les deux types de maillage). Pour les trois maillages de même type, un petit décalage est enregistré avec 19 éléments; nous obtenons par contre pratiquement la même précision avec respectivement 23 et 27 éléments. A partir de 23 éléments, la finesse de maillage n'a donc plus d'influence sur la précision des résultats; il y a bien convergence.

La figure 7.14 montre qu'avec moins de 19 éléments, les résultats manquent de précision et ne sont plus acceptables.



Au vu de ces résultats, nous pouvons dire qu'un maillage à 23 éléments est largement suffisant pour le calcul de la plaque orthotrope à 3 couches que nous étudions.

Les temps de calcul sont extrêmement courts; il ne faut pas plus de 40s sur une machine de puissance moyenne (SUN SS20) pour obtenir la réponse de la plaque composite (avec 23 éléments et 200 pas de temps).

Une comparaison directe avec les modèles 3D au point de vue durée des calculs n'est pas encore possible, puisque le code numérique que nous avons développé n'a pas été optimisé du point de vue rapidité des calculs. Toutefois, nous pensons, compte tenu des temps de calcul enregistrés, que le modèle que nous utilisons est beaucoup plus rapide que les modèles éléments finis 3D.

VII.2. ÉTUDE DU DÉLAMINAGE DE LA PLAQUE MULTICOUCHE IMPACTÉE

La première partie de ce chapitre a permis de fixer des paramètres se référant à la modélisation du problème d'impact que nous étudions, et de procéder à une validation du calcul de la réponse en déplacement du centre de la plaque impactée.

Nous pouvons à présent aborder la dernière partie de ce travail qui constitue son aboutissement, et qui consiste à mettre en évidence la capacité du modèle M4s à fournir efficacement et rapidement des informations relatives à l'étude du délaminage d'une plaque composite soumise à l'impact.

Nous avons vu dans l'étude bibliographique (§III.3.2.c) que le délaminage peut être caractérisé par trois aspects: son initiation, sa propagation, et enfin l'étendue de la surface délaminage.

Il ressort des résultats expérimentaux rapportés dans cette synthèse bibliographique, que l'initiation du délaminage est régie par les contraintes transverses aux interfaces, le plus souvent au niveau de la zone de contact, que sa propagation à travers l'épaisseur est en relation étroite avec la propagation des ondes de flexion engendrées par l'impact, et enfin que l'étendue de la surface délaminée est en relation avec la réponse globale de la structure.

Pour étudier ces trois aspects du délaminage, nous allons consacrer trois paragraphes:

Dans le premier, nous allons calculer les contraintes transverses à travers la plaque, dans le but de déterminer l'endroit où ces contraintes sont optimales. Cela nous renseignera sur l'endroit d'initiation du délaminage. Nous étudierons ensuite l'effet de quelques paramètres du problème sur la position et la valeur de cette contrainte maximale;

Dans le deuxième paragraphe, nous mettrons en évidence l'existence et la propagation des ondes de flexion dans la plaque, ainsi que l'effet que peuvent avoir certains paramètres sur cette propagation;

Dans le troisième paragraphe enfin, nous étudierons l'influence de certains paramètres, ou données du problème, sur la réponse globale, et donc par la même sur l'étendue de la surface délaminée.

Nous aurons ainsi abordé les trois aspects du délaminage et mis en évidence les informations que peut fournir simplement et rapidement le modèle M4s.

VII.2.1. Initiation du délaminage

a) Point d'initiation du délaminage

C'est le mécanisme de propagation par bande à travers l'épaisseur (cf.III.3.2) qui est à l'origine de l'initiation du délaminage. Par ailleurs, nombreux auteurs parmi ceux qui ont pu calculer les contraintes transverses, pensent que le délaminage est régi par ces contraintes [S.P.Joshi (1985), C.A.Ross & col. (1985), F.K.Chang & col. (1990), S.Abrate (1991,1994)...], qui doivent par conséquent être à la base de la définition d'un éventuel critère de délaminage.

Comme nous l'avons relevé à travers l'étude en statique (§II.2 et §II.3), une relation étroite relie les contraintes transverses d'interface τ du modèle M4 aux contraintes équivalentes du modèle 3D. Pour le modèle M4s, l'information relative à l'interface est résumée dans la donnée des contraintes τ . Nous pensons alors que ces contraintes transverses τ du M4s peuvent constituer un candidat intéressant et simple d'accès pour étudier l'initiation et éventuellement définir un critère simple de délaminage.

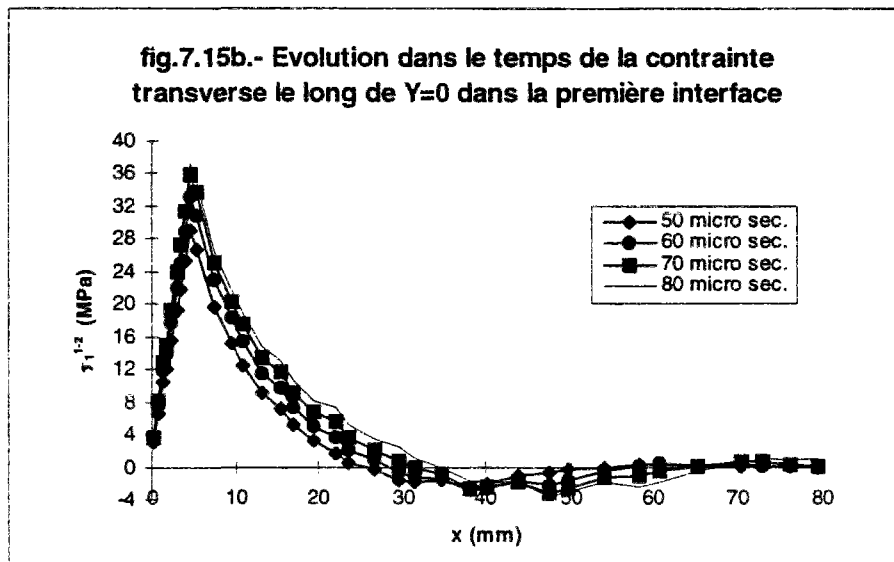
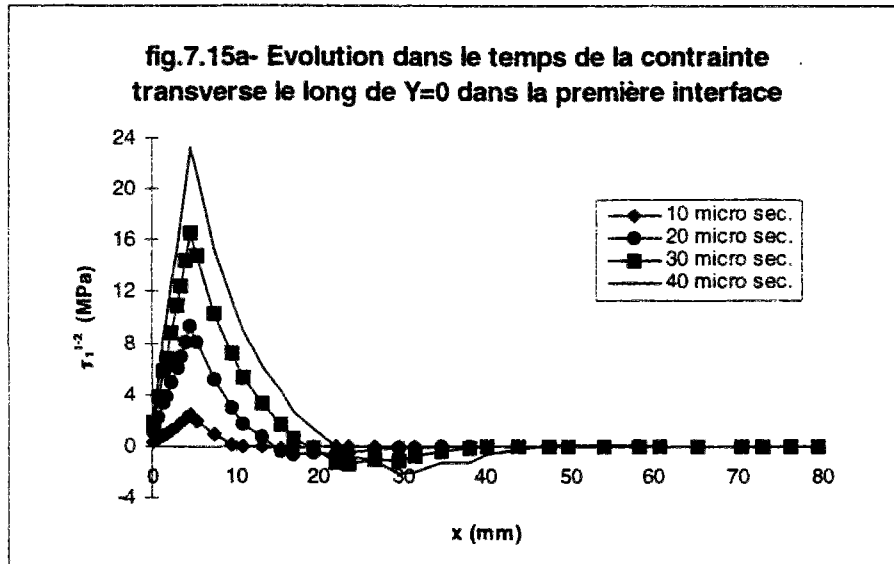
Nous allons donc dans ce paragraphe étudier la répartition des contraintes transverses ainsi que l'influence de certains des paramètres d'impact sur cette répartition. Nous nous intéresserons surtout à localiser les points de maxima de contrainte τ_{rz} . Nous pensons que c'est là que le délaminage est le plus susceptible de s'initier. Bien sûr, il ne s'agit pas pour l'instant de définir un critère de délaminage, mais de marquer l'intérêt que présentent les contraintes τ pour sa définition, tout en mettant en valeur la simplicité d'accès à ces contraintes qu'offre le modèle M4s.

Pour localiser le point de maxima de contrainte τ_{rz} , nous allons étudier la répartition de cette contrainte d'abord selon l'axe X, puis selon l'axe Y. Cela nous permettra d'estimer la distance de ce point au centre de la plaque. Nous essayerons ensuite, à travers l'étude de la répartition de τ autour de la zone de contact, d'estimer l'angle polaire de ce point d'initiation.

Nous ne pourrions pas effectuer de comparaison avec d'autres résultats, puisque d'une part nous ne disposons pas de résultats expérimentaux de mesure aux interfaces, et que d'autre part les quelques études numériques qui ont essayé de calculer les contraintes transverses se sont généralement contentées d'en calculer des moyennes sur l'épaisseur.

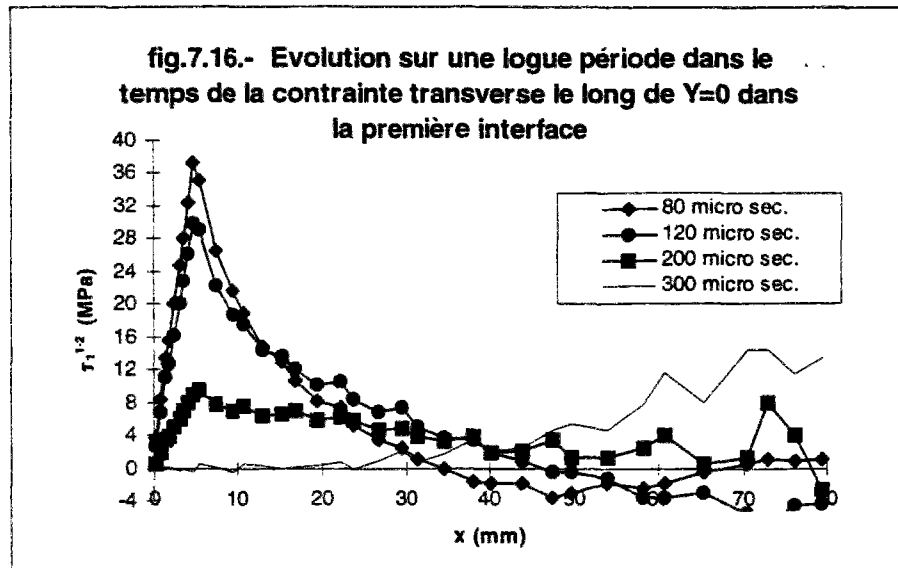
● *Contrainte transverse τ le long de l'axe $Y=0$*

Les figures 7.15a et 7.15b donnent l'évolution dans le temps de la composante 1 de la contrainte transverse τ dans la première interface 0/90. Elles montrent que le point d'intensité maximale le long de cette ligne se situe au voisinage de la zone de contact (le rayon de cette zone est en effet de 4.76mm).



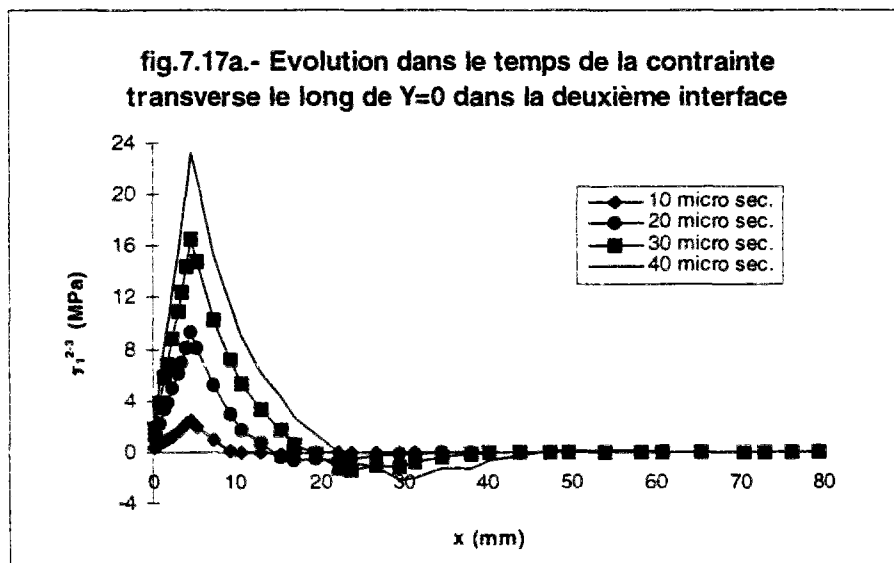
Nous rappelons que la durée de l'impact (premier contact) est encore ici de l'ordre de 250 μ s; cela veut dire que nous nous plaçons dans la gamme des *chocs rapides*.

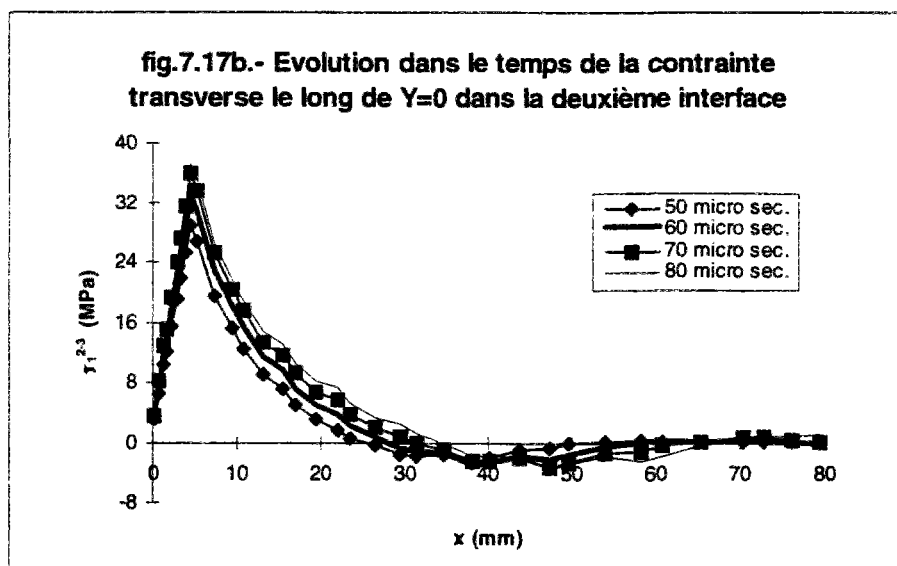
Nous remarquons alors que le point d'intensité maximale ne se déplace pas lorsqu'au cours du temps l'onde de flexion se propage. Ce point d'intensité maximale de contrainte τ et le point d'initiation du délaminage ont donc en commun de ne pas évoluer dans le temps. Ce qui indique encore que les contraintes transverses τ sont en relation avec l'initiation du délaminage plutôt qu'avec sa propagation dans le plan de l'interface.



Après réflexion de l'onde (fig.7.16), le point de contrainte maximale peut se situer vers le bord de la plaque (300 μ s). Ceci rappelle l'éventualité évoqué au chapitre III, selon laquelle le délaminage pouvait sous certaines conditions d'impact s'initier aux bords de la plaque.

Les figures 7.17a et 7.17b représentent le long de l'axe Y=0, l'évolution de la contrainte transverse τ_1^{2-3} dans la deuxième interface 0/90.

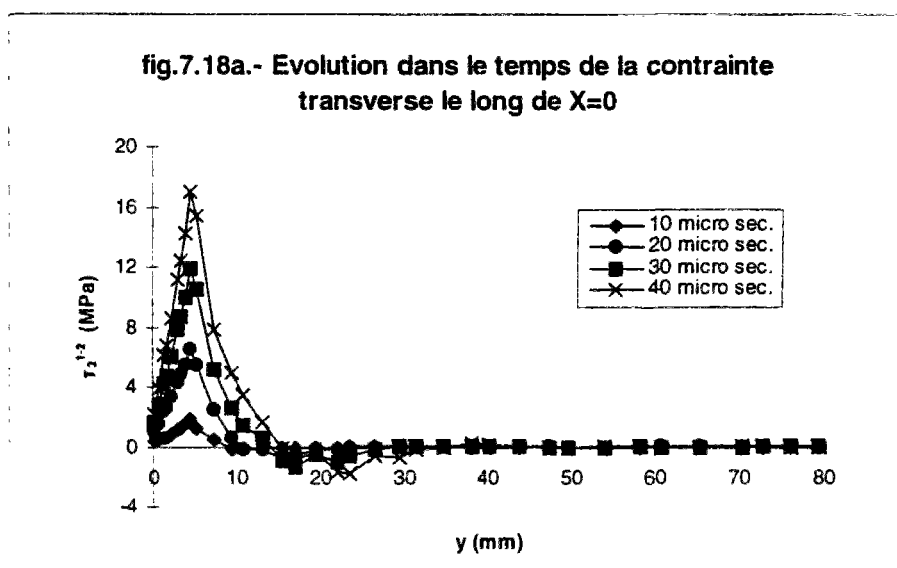


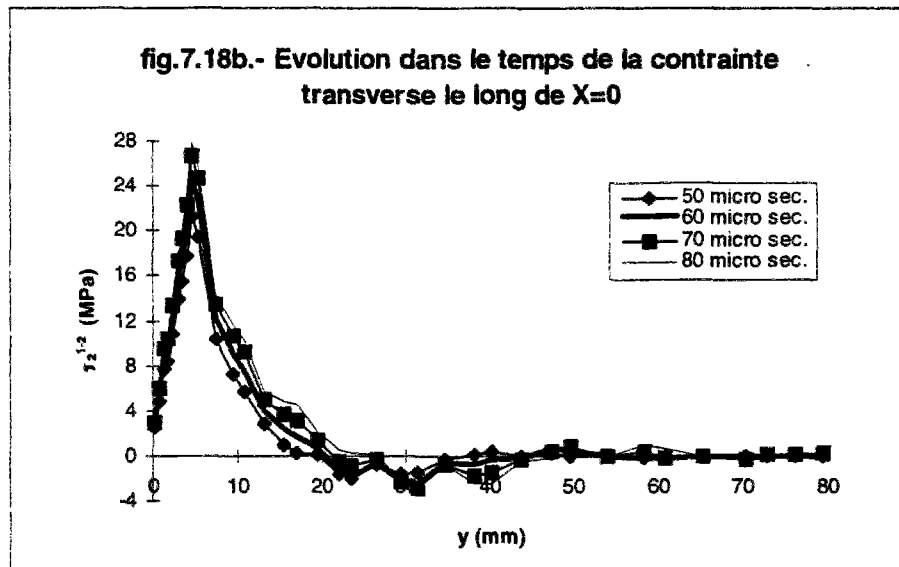


Hormis les amplitudes, ces deux courbes présentent les mêmes allures que les trois précédentes. Elles viennent confirmer que le maximum de contrainte de cisaillement transverse se situe, pour les deux interfaces, au voisinage de la zone de contact, et plus précisément à la limite de celle-ci.

● *Contrainte transverse τ le long de l'axe $X=0$*

De façon similaire et symétrique, nous avons calculé la composante 2 de la contrainte τ le long de l'axe $X=0$.





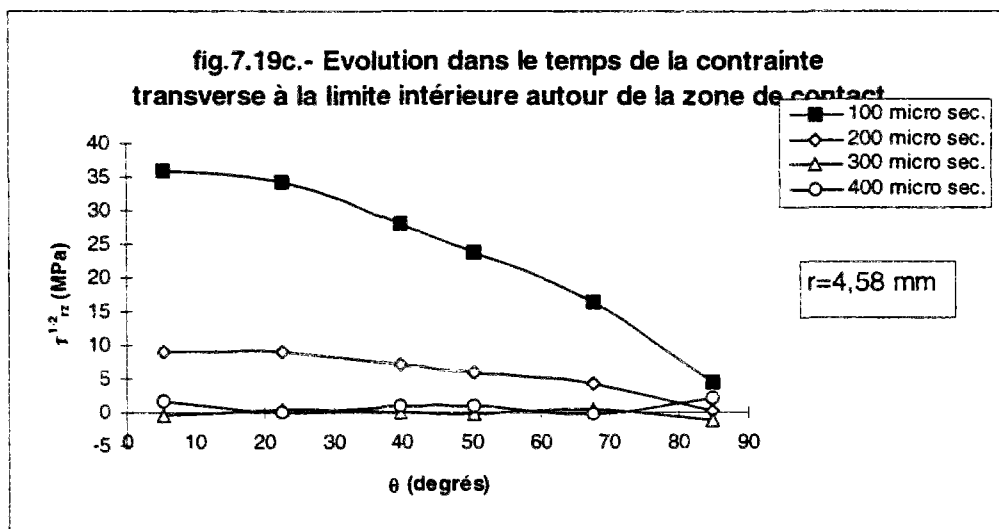
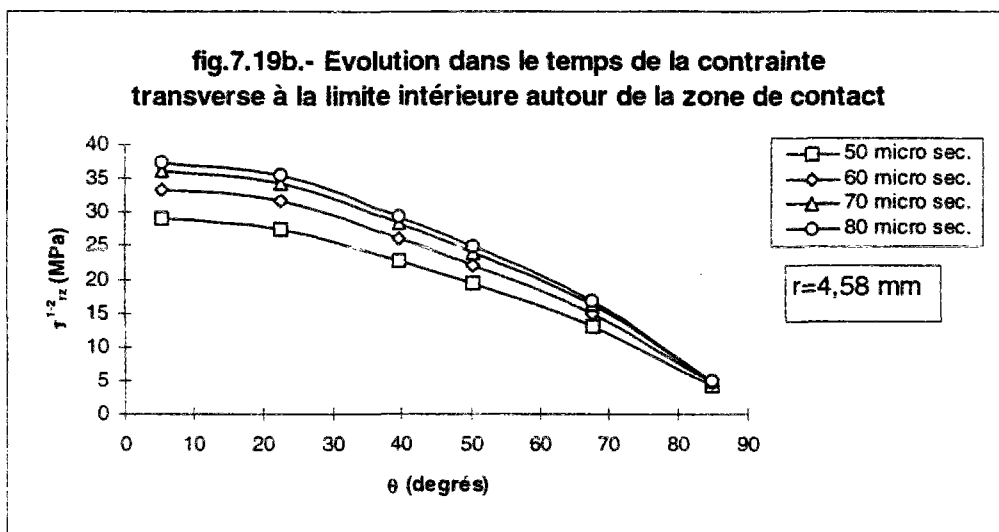
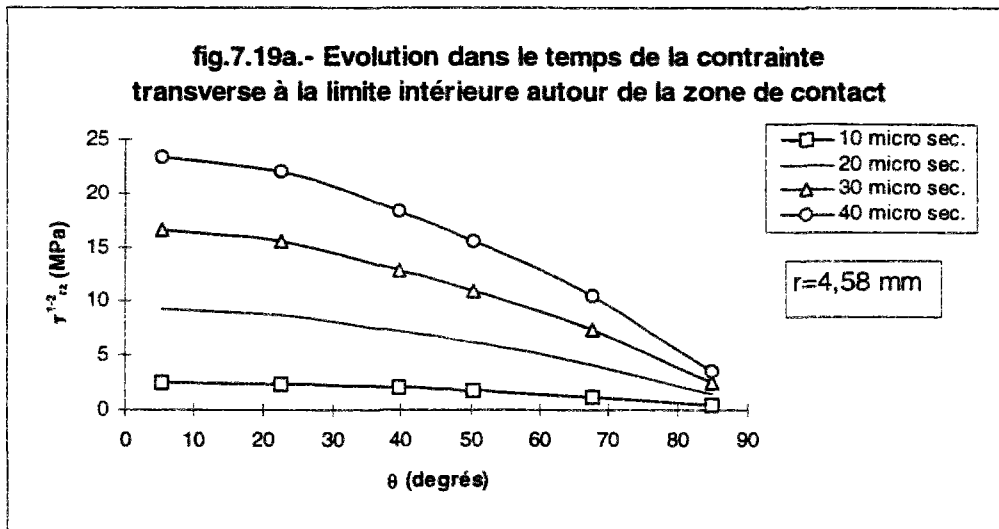
Les figures 7.18a et 7.18b montrent que les variations le long de l'axe $X=0$ sont similaires à celles selon l'axe $Y=0$. L'amplitude des contraintes est toutefois plus faible. Le point d'intensité maximale se situe encore au voisinage de la zone d'impact.

Nous allons alors axer nos recherches du point d'intensité maximale à la limite de la zone de contact. Nous rechercherons autour de celle-ci, la direction selon laquelle l'intensité de τ est la plus grande, c'est à dire là où le délaminage est le plus susceptible de s'initier. C'est l'objet du point suivant.

● Répartition de la contrainte τ autour de la zone de contact

Nous allons donc essayer de localiser le point où la contrainte est maximale tout autour à la limite de la zone de contact. Nous allons effectuer cette recherche à partir de la composante radiale τ_{rz} de la contrainte de cisaillement transverse (définie par la relation 2.29 du §II.3.3.). Cette composante radiale se confond avec τ_1 lorsque la direction θ vaut 0° , et avec τ_2 lorsque cette direction vaut 90° .

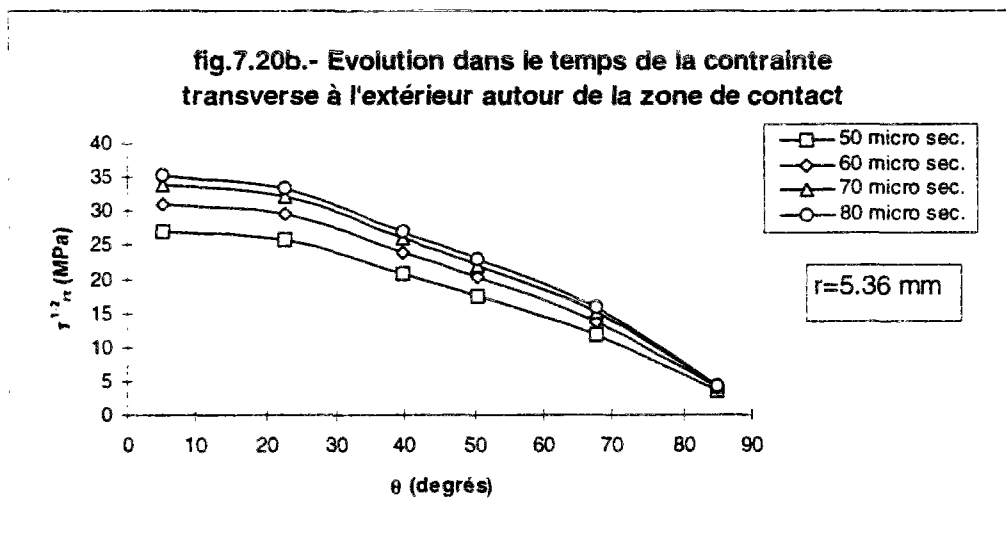
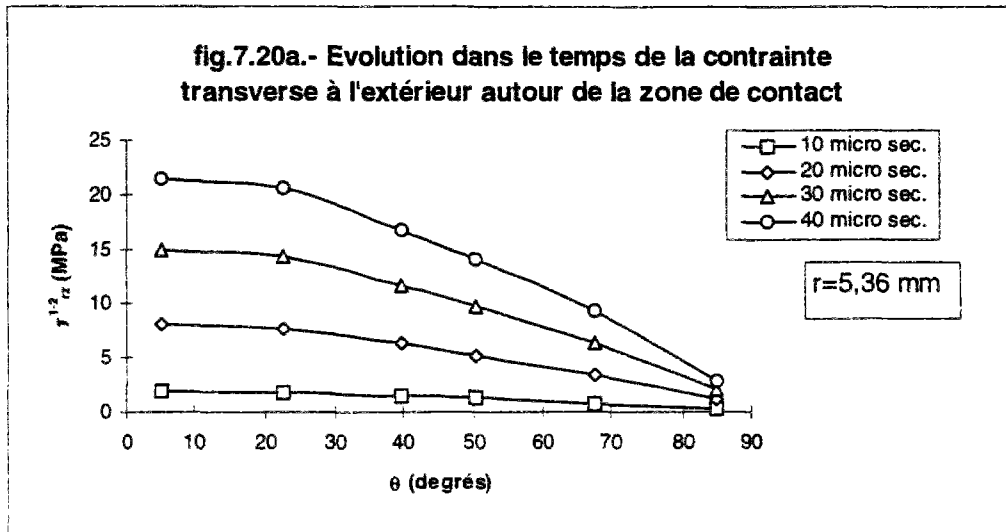
Nous pensons qu'il est possible d'imaginer un critère de délaminage simple portant sur τ_{rz}^{\max} . C'est pour cela que nous nous limitons à l'étude de τ_{rz} . Le fait de prendre éventuellement en compte $\tau_{\theta\theta}$ (définie par 2.30) dans un tel critère, ne change rien à la démarche que nous suivons ici.



Les figures 7.19.a-b-c ont été obtenues à une distance $r=4.58$ mm légèrement inférieure au rayon de contact $R=4.76$ mm. Elles montrent que pendant les

premiers instants de l'impact, le maximum de contrainte τ_{rz} correspond à la direction $\theta=0^\circ$.

Les figures 7.20a et 7.20b ont été obtenues à une distance $r=5.36\text{mm}$, légèrement supérieure au rayon de contact. Comparées aux figures 7.19a et 7.19b, elles indiquent que le point de maxima de contrainte τ_{rz} est très proche de la limite de la zone de contact.



● Localisation du point de maxima de contrainte τ

A partir des résultats précédents, nous pouvons conclure, en nous basant sur l'hypothèse que l'initiation du délaminage a lieu au point où la contrainte de cisaillement transverse τ_{rz} est maximale, que cette initiation devrait se produire à la limite de la zone de contact, dans la direction $\theta=0^\circ$.

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, cette initiation n'a lieu qu'après atteinte d'un certain seuil en dessous duquel des fissures apparaissent certes, mais pas le délaminage.

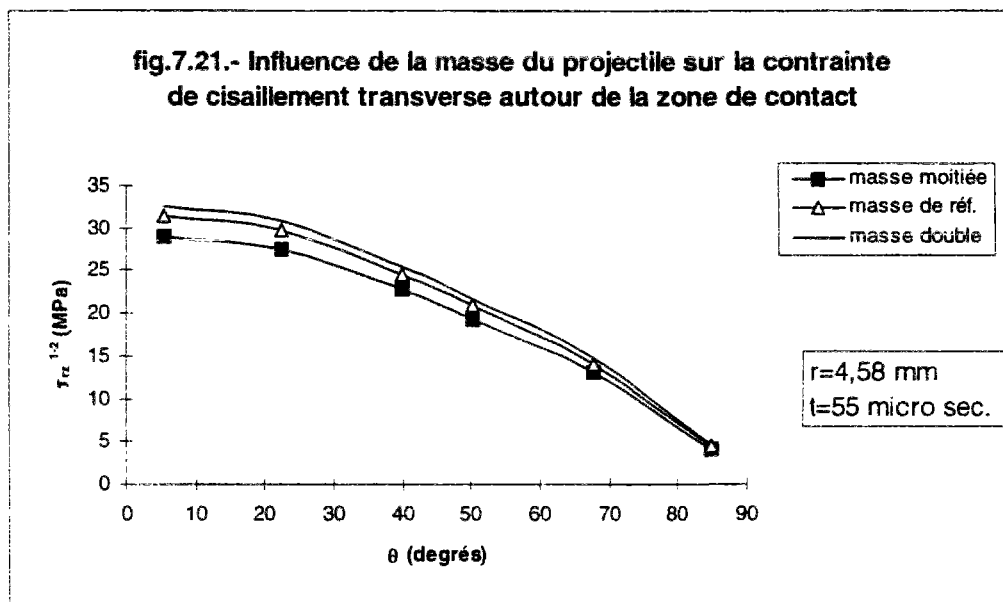
Si on peut définir un critère de délaminage simple portant sur τ_{rz}^{\max} uniquement, le seuil de délaminage peut être défini de manière simple à partir de la composante radiale τ_{rz} de cisaillement transverse.

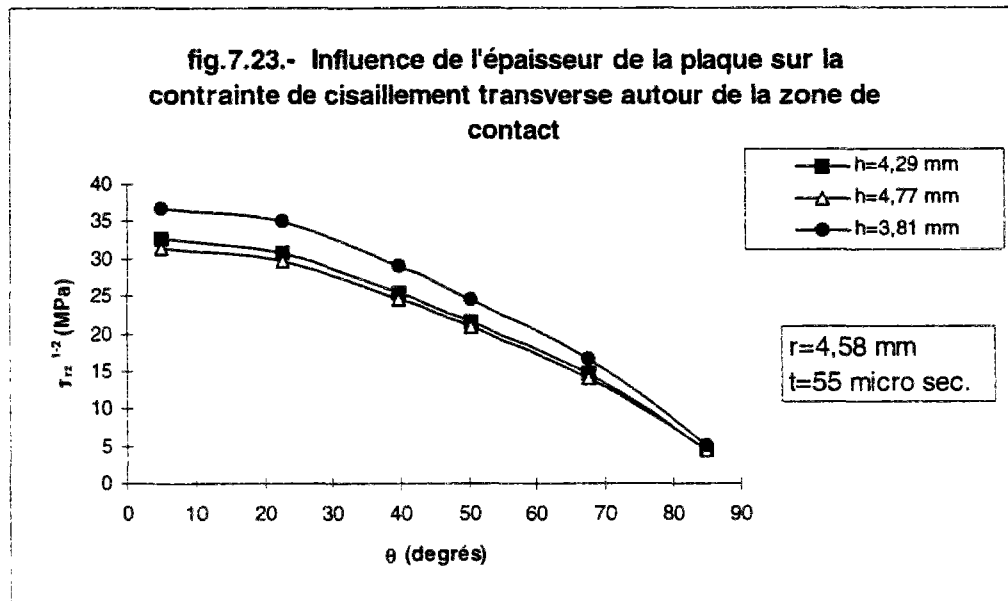
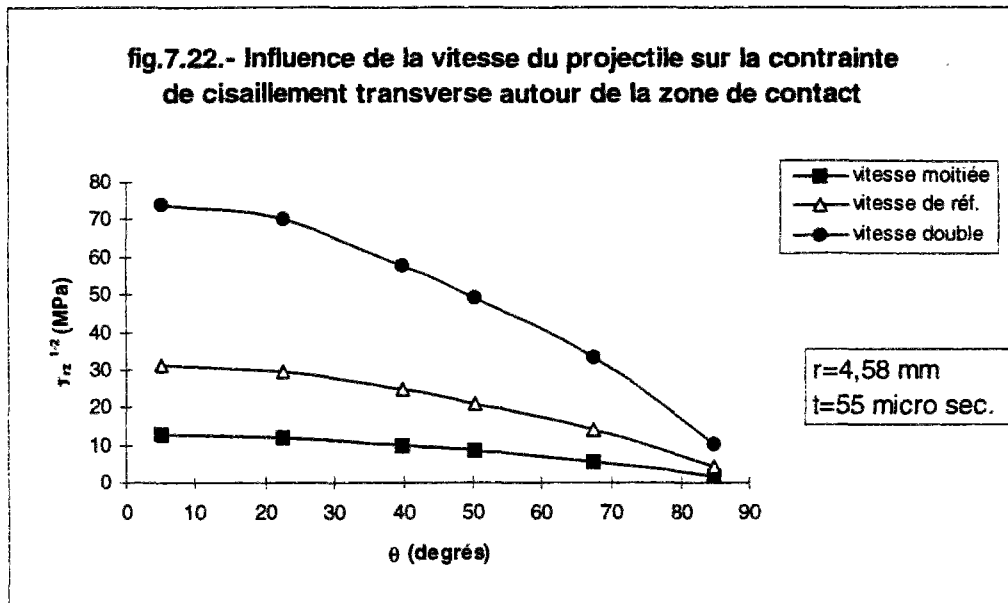
Nous allons à présent étudier l'effet que peuvent avoir quelques paramètres du problème sur l'endroit où τ_{rz} atteint son maximum.

b) Effet des paramètres d'impact sur la répartition de la contrainte τ autour de la zone d'impact

Nous nous limiterons, en guise d'exemples, à l'étude de l'effet de la masse et de la vitesse du projectile, ainsi que celui de l'épaisseur totale de la plaque.

Dans notre analyse, nous nous basons sur l'hypothèse que le délaminage s'initie au point où l'intensité de contrainte τ_{rz} est maximale.





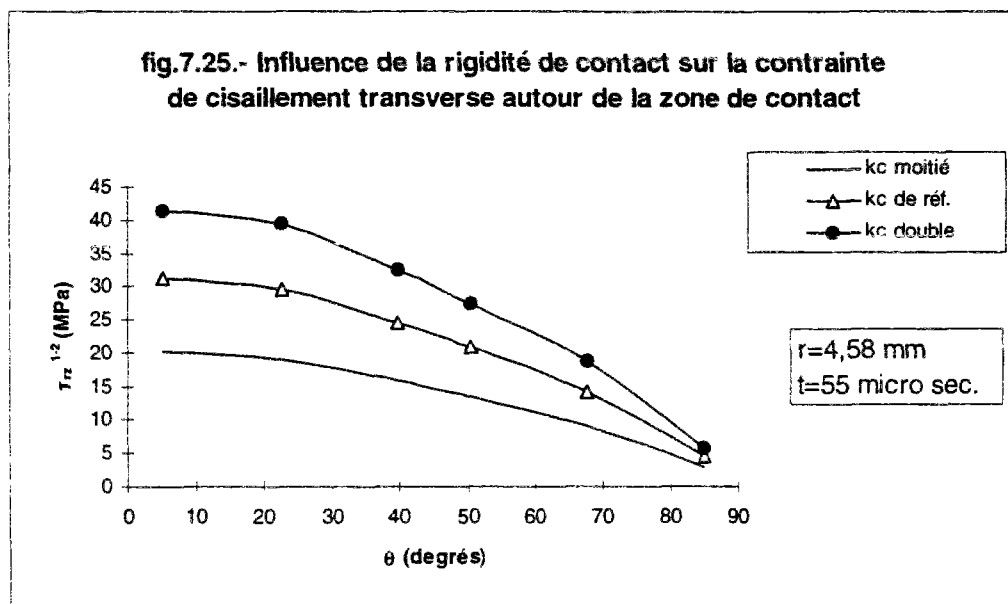
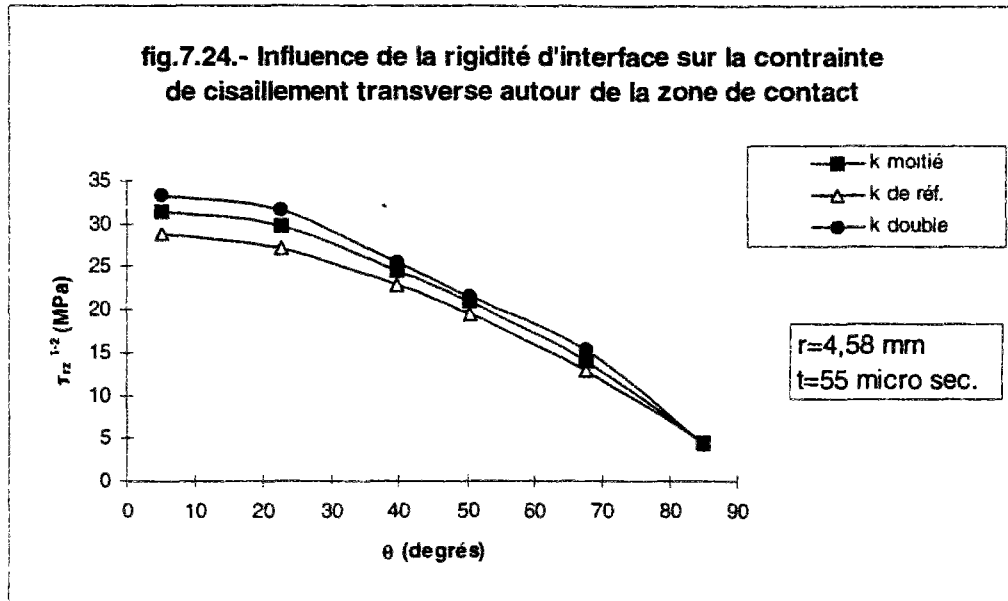
Au vu des figures 7.21 et 7.22, il apparaît qu'une augmentation de la masse ou de la vitesse du projectile a pour conséquence d'augmenter la valeur de τ_{rz} ; la structure sera alors plus susceptible de délaminer.

Très approximativement, la valeur de τ_{rz} évolue en $(V_0)^{5/4}$; si nous multiplions V_0 par 2, nous multiplions τ_{rz} par environ 2.4.

Le fait par contre d'augmenter l'épaisseur de la structure, diminue la composante τ_{rz} et protège un peu plus la structure contre le délaminage (fig.7.23).

Très approximativement là encore, la valeur de τ_{rz} évolue en $1/h$; si nous multiplions h par 2, nous divisons τ_{rz} également par 2.

Au vu de ces trois figures, nous pouvons aussi constater que l'effet de la vitesse est le plus marquant et le plus important.



Nous noterons enfin, que dans les calculs précédents, nous avons procédé à une étude plutôt qualitative du délaminage, et nous n'avons pas attaché une grande importance aux amplitudes obtenues. Dans ce sens, nous n'avons pas étudié, ce qui semblait logique, l'effet des paramètres de modélisation (loi de contact en décharge, rigidité de contact...) sur les amplitudes enregistrées. Nous attirons ici l'attention que ces paramètres, bien que n'affectant pas les résultats qualitativement, peuvent devenir importants lorsque l'on veut calculer avec précision le maximum de la contrainte de cisaillement transverse pour l'utiliser dans un critère de délaminage (fig.7.24, 7.25).

Mais cela devrait faire l'objet d'une étude ultérieure. La figure 7.25 montre cependant, que dans ce cas il faut définir avec précision ces paramètres.

Pour fixer les idées, nous dirons qu'approximativement τ_{rz} évolue en $k^{1/7}$ et $(k_c)^{1/2}$.

VII.2.2. Ondes de flexion et propagation du délaminage

A partir de travaux expérimentaux conduits avec différentes vitesses, et menés sur des empilements proches du notre, *Takeda et col. (1981b)* ont mis en évidence l'existence d'une onde de flexion de grande amplitude et de faible vitesse, dominant la réponse. La vitesse initiale était de l'ordre de 290m/s dans la direction 0° et 225m/s dans la direction 90°. Ces vitesses diminuaient lorsque l'on s'éloignait du centre de la plaque.

Cette onde de flexion dominante revêt une importance capitale quant à l'étude des phénomènes essentiels présents tels que la fissuration et le délaminage. C'est ainsi que *Takeda et col. [1980, 1981b, 1982]* ont soutenu la thèse selon laquelle le délaminage (dans l'interface) est en relation étroite avec cette onde dominante. Les résultats que nous avons rapportés dans la synthèse bibliographique indiquent aussi que cette onde conditionne la propagation du délaminage dans le plan de l'interface. *Takeda et col. (1982)* ont même relevé que la vitesse de propagation du délaminage dans la direction X se stabilise à une valeur très proche de celle de la vitesse de l'onde dans cette direction.

Nous allons montrer dans ce paragraphe, que le modèle M4s est capable d'étudier cette onde et sa propagation. Nous tâcherons aussi de montrer la capacité du modèle M4s à étudier l'influence de paramètres tels que la masse et la vitesse du projectile et l'épaisseur de la plaque sur l'amplitude et la vitesse de cette onde.

Nous aurons ainsi montré que, si la nature de la relation qui relie la propagation de l'onde à celle du délaminage est spécifiée, le modèle M4s serait capable de fournir les informations nécessaires à l'étude de la propagation de ce dernier.

a) Naissance et propagation des ondes de flexion

Les figures 7.26a et 7.26b montrent clairement l'existence de l'onde de flexion.

fig.7.26a.- Mise en évidence de l'onde de déplacement selon Y=0

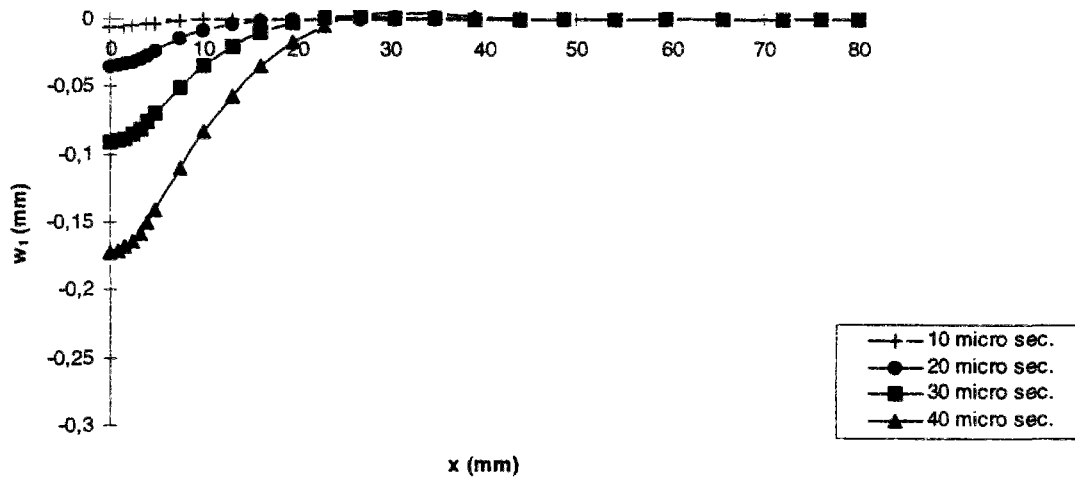
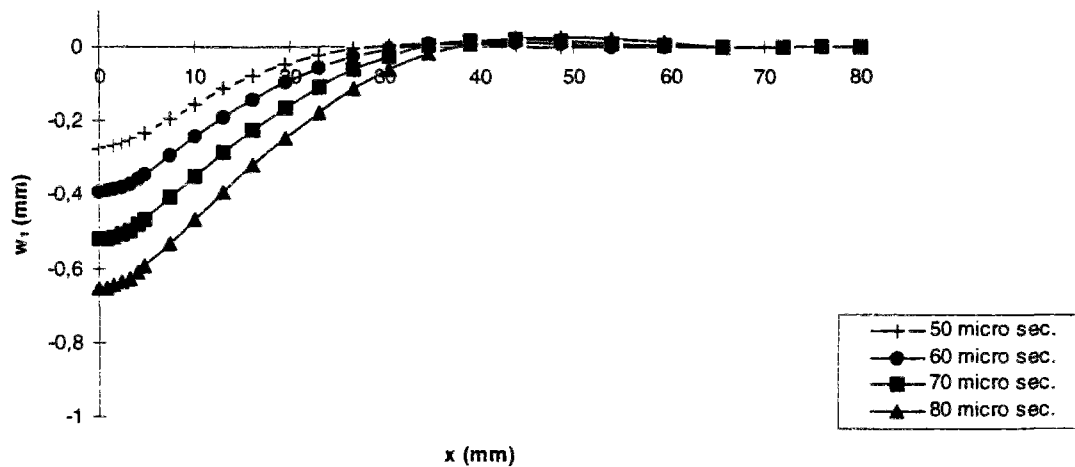
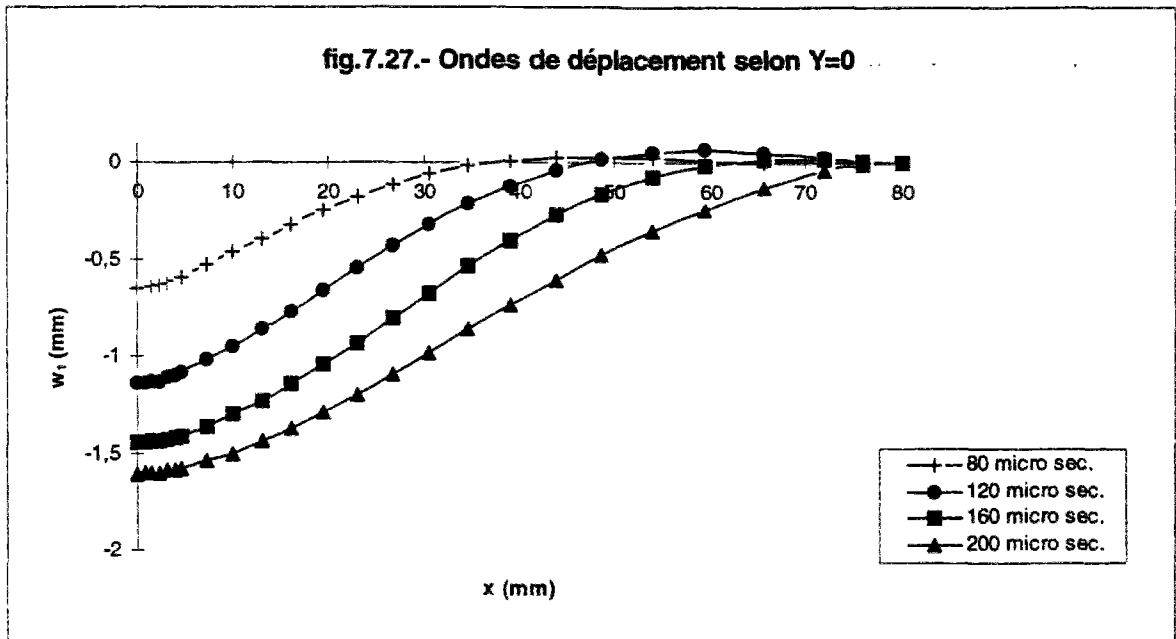


fig.7.26b.- Mise en évidence de l'onde de déplacement selon Y=0



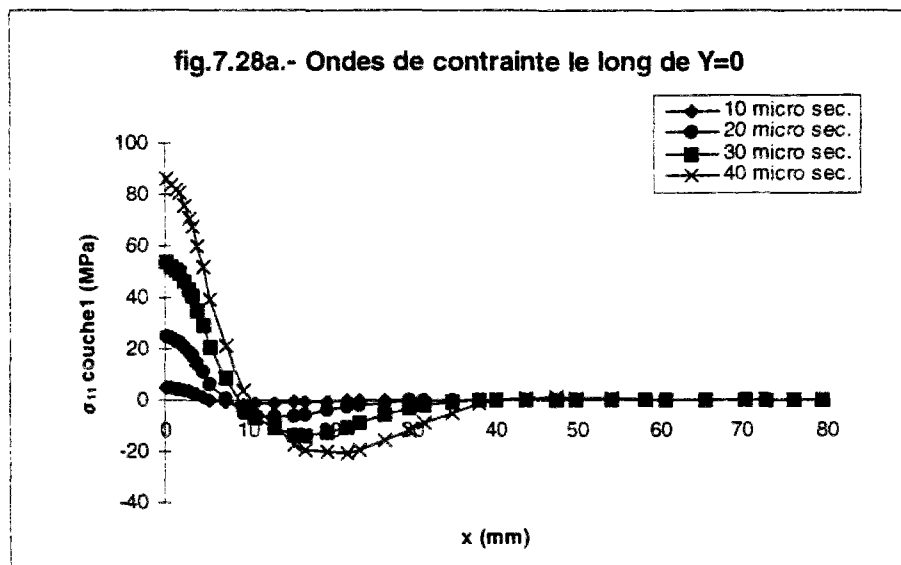
Cette onde naît au niveau de la zone de contact et se propage vers les bords; elle impose des déformations à l'ensemble de la plaque.

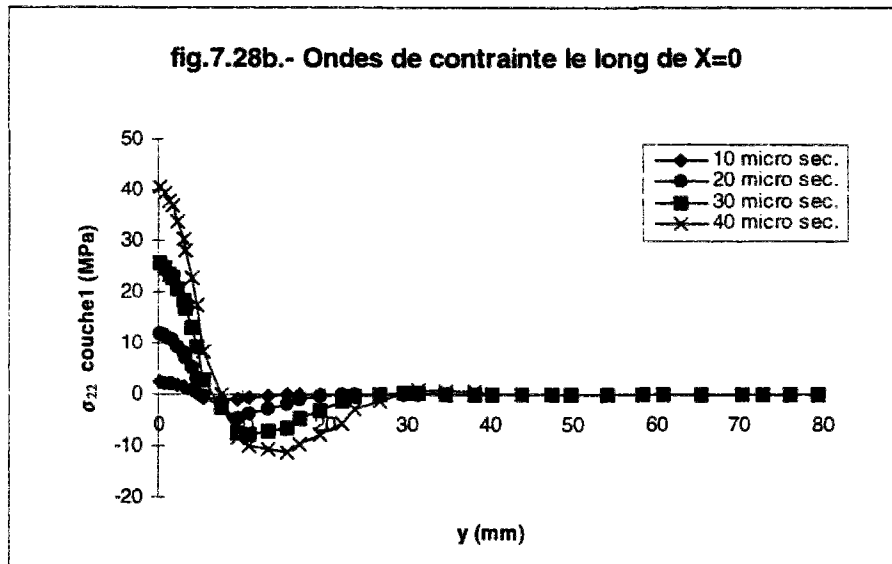
Arrivée au bord encastree, l'onde se réfléchit et donne naissance à une onde réfléchie qui vient se superposer à l'onde incidente (fig.7.27).



L'onde n'ayant pas une forme et une vitesse constante, nous n'avons pas trouvé un moyen de mesurer de façon précise sa vitesse variable.

Nous avons pu toutefois comparer la vitesse de l'onde dans la direction X et celle dans la direction Y (fig.7.28a et 7.28b).





Le point où l'intensité de contrainte est minimale se déplace plus rapidement dans la direction X (fig.7.28a) que dans la direction Y (fig.7.28b). La vitesse de propagation de l'onde est donc plus grande selon la direction du module d'Young le plus élevé.

b) Influence des paramètres d'impact sur les ondes

Nous allons à présent étudier l'effet sur la propagation des ondes de la masse et de la vitesse du projectile, ainsi que celui de l'épaisseur de la plaque.

** Effet de la masse du projectile*

La masse de référence avec laquelle nous avons mené les calculs précédents est $m_2=0.01417\text{kg}$. Nous allons ici effectuer des calculs avec des masses double et moitié.

fig.7.29a.- Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion pendant les premiers instants de l'impact

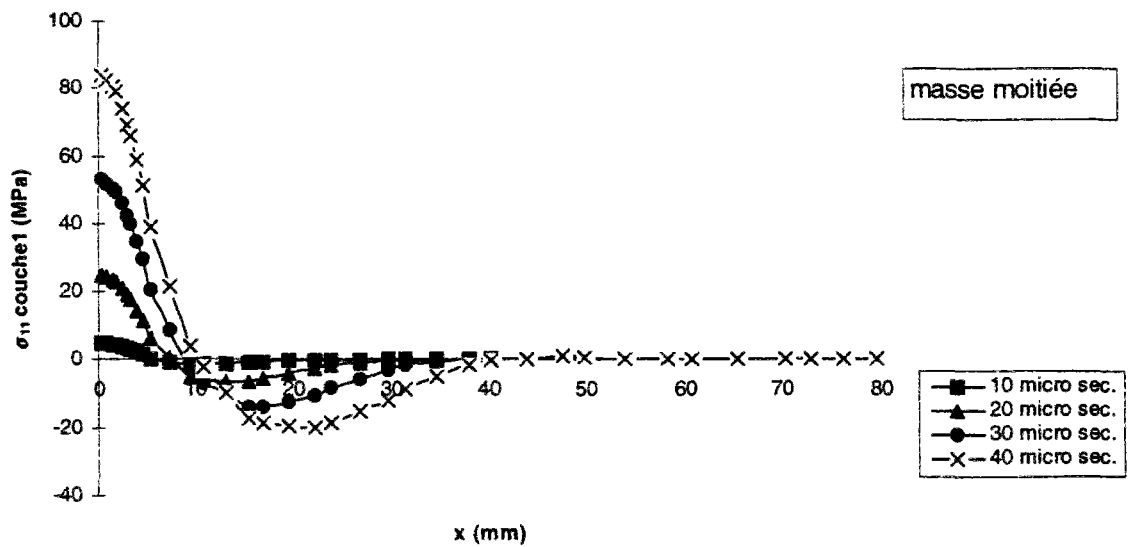
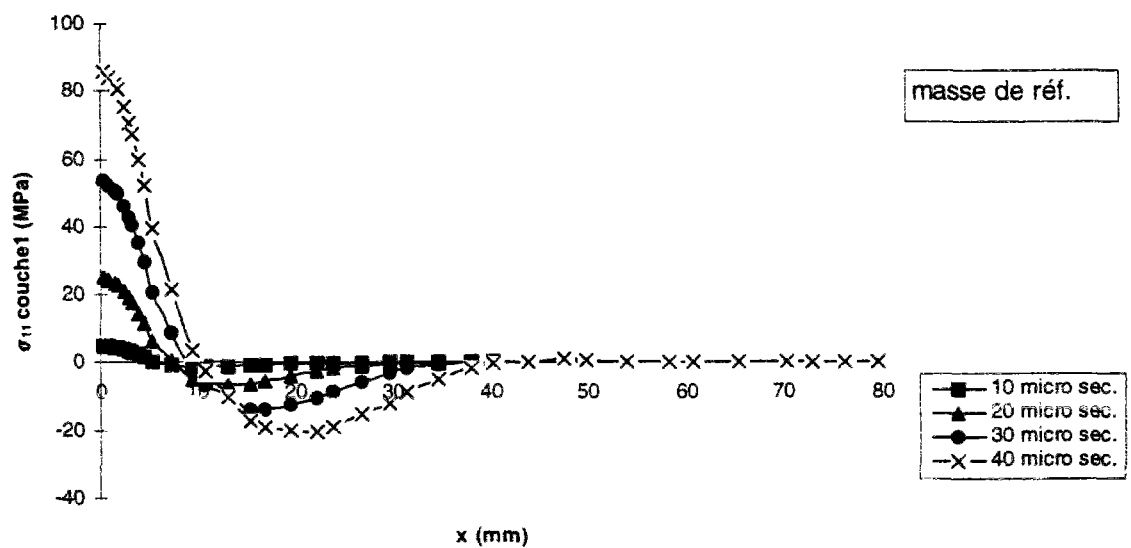
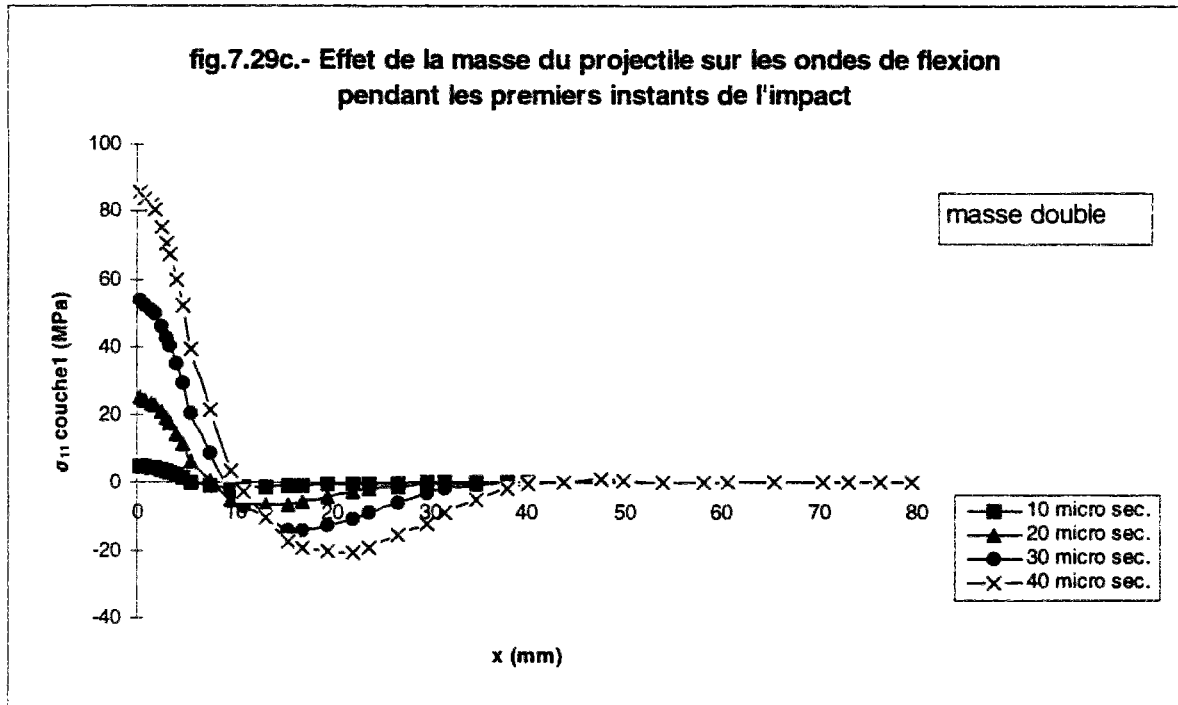


fig.7.29b.- Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion pendant les premiers instants de l'impact





Les courbes des figures 7.29.a-b-c montrent que pendant les premiers instants de l'impact (jusqu'à 40 μ s), la masse du projectile n'a pratiquement pas d'effet sur l'onde de flexion dominante.

Pour les instants ultérieurs (fig.7.30.a-b-c), l'effet d'inertie augmente. L'amplitude de l'onde est alors affectée.

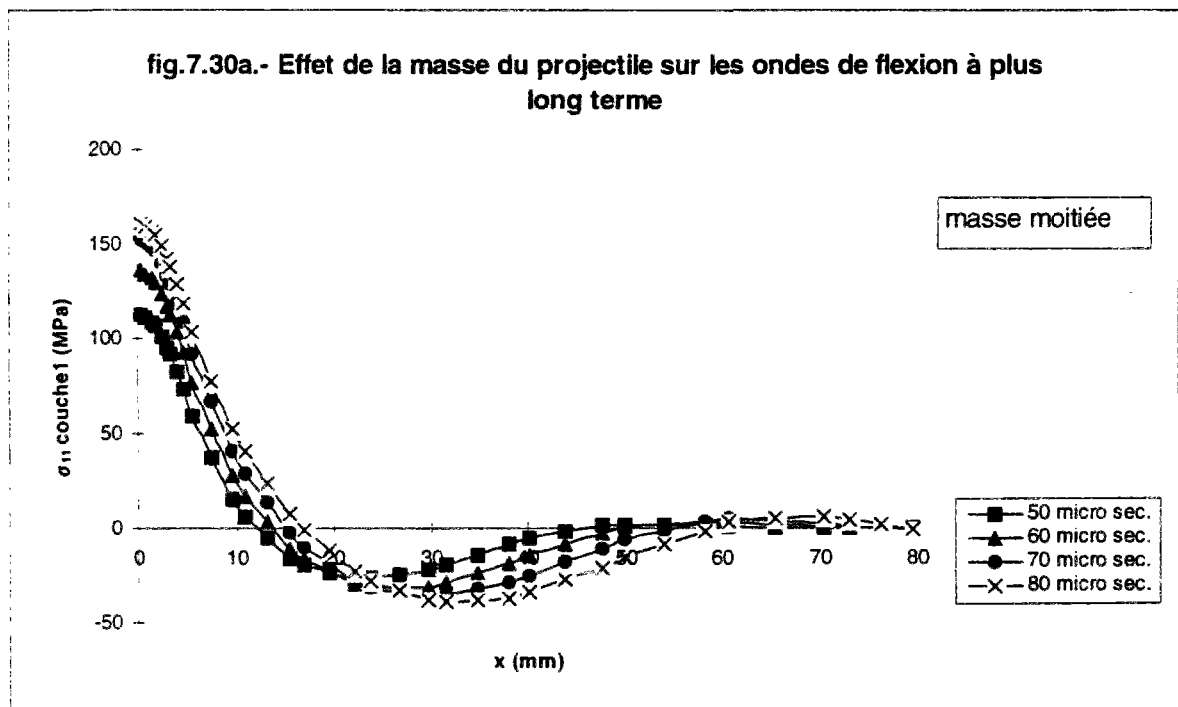


fig.7.30b.- Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion à plus long terme

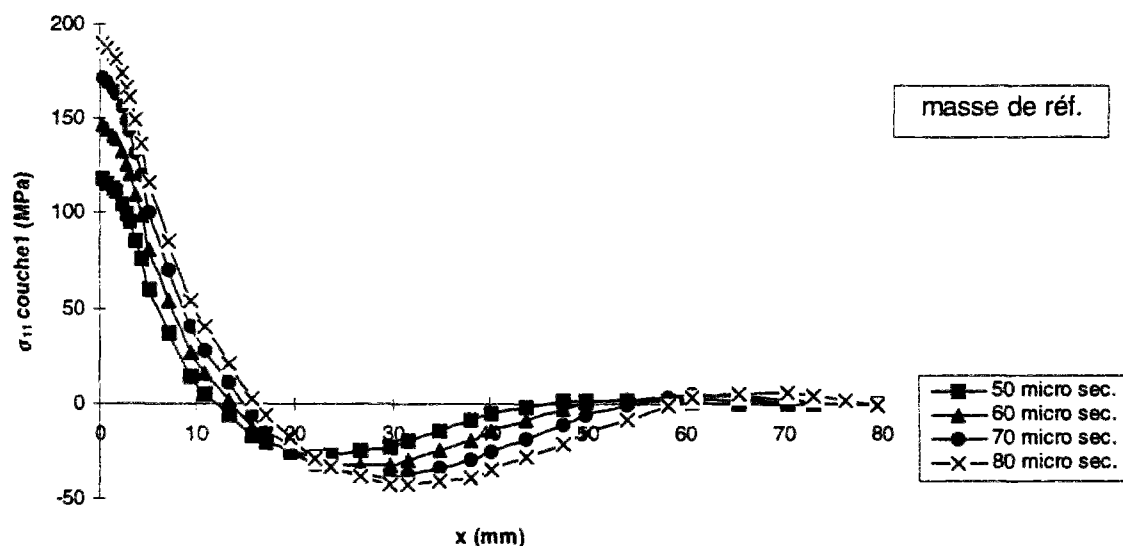
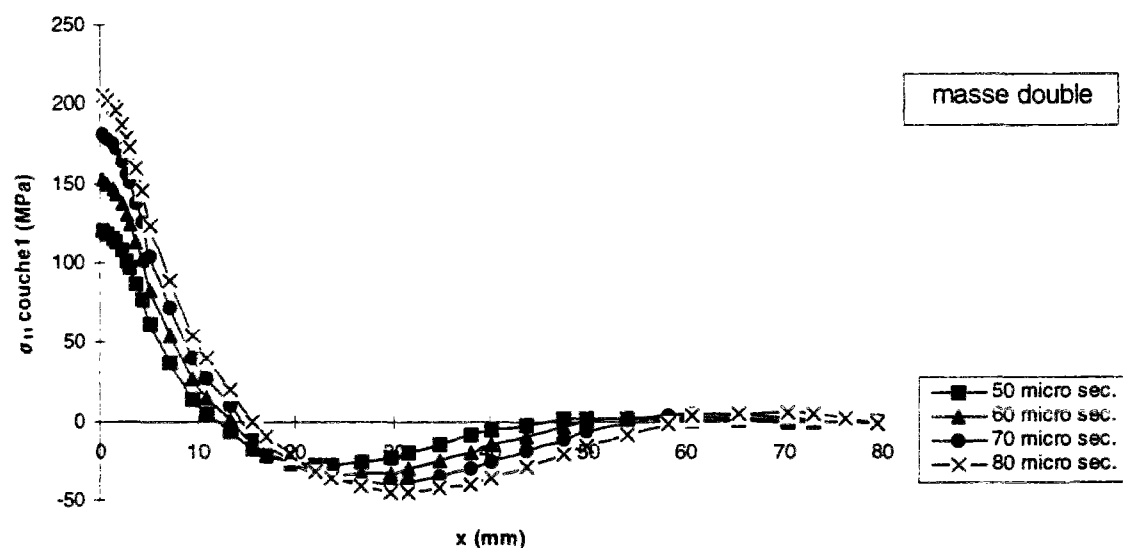


fig.7.30c.- Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion à plus long terme



Nous concluons qu'une augmentation de la masse du projectile a pour effet d'augmenter l'amplitude de l'onde. La vitesse de propagation de l'onde quant à elle ne semble pas dépendre de la masse du projectile.

● Effet de la vitesse du projectile

Les calculs ont été menés avec des vitesses double et moitié de la valeur de référence. Les résultats sont illustrés par les courbes des figures 7.31.a-b-c.

fig.7.31a.- Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion

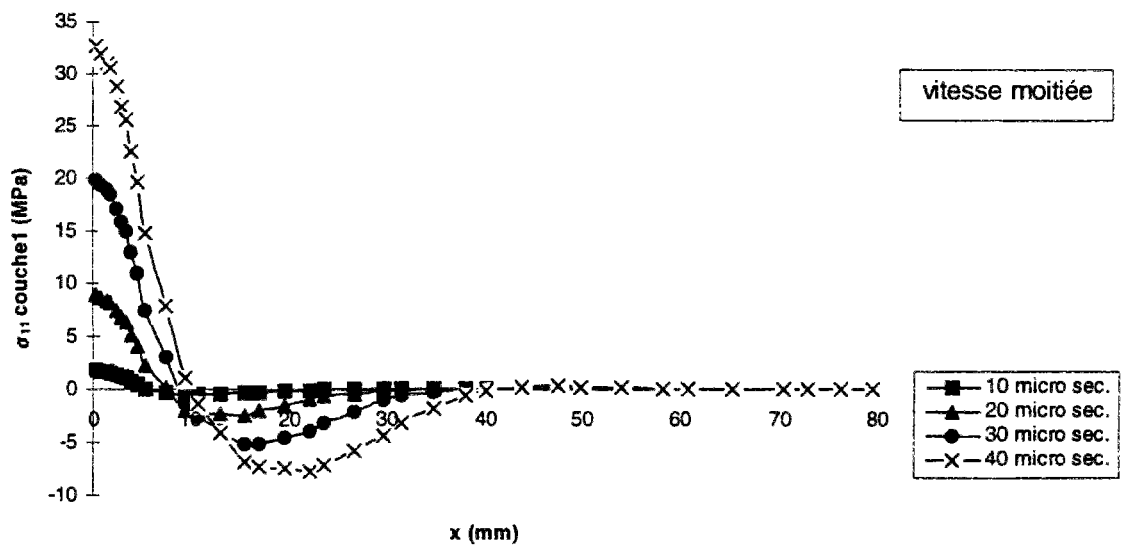


fig.7.31b.- Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion

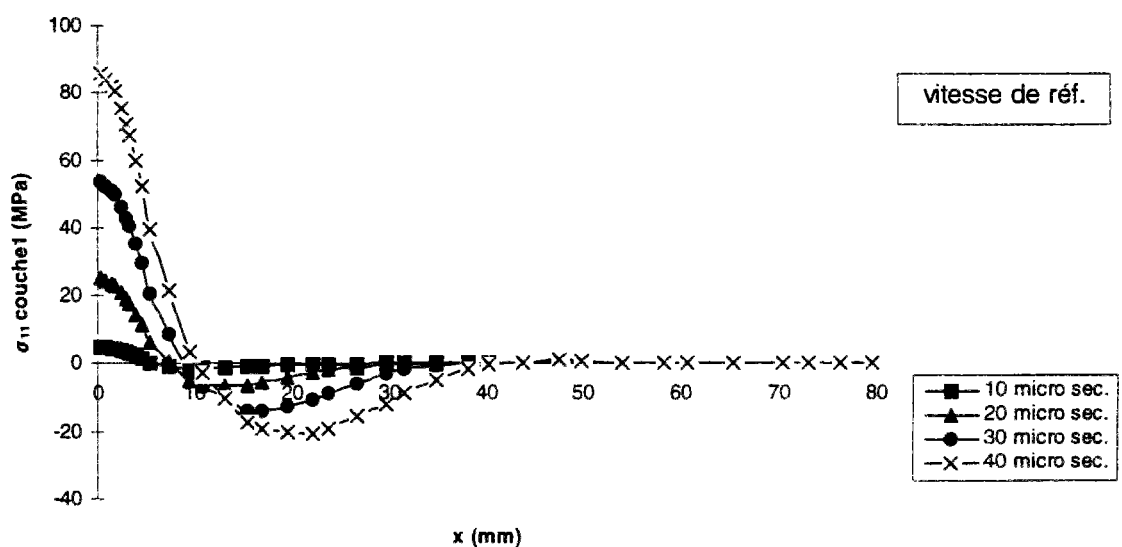
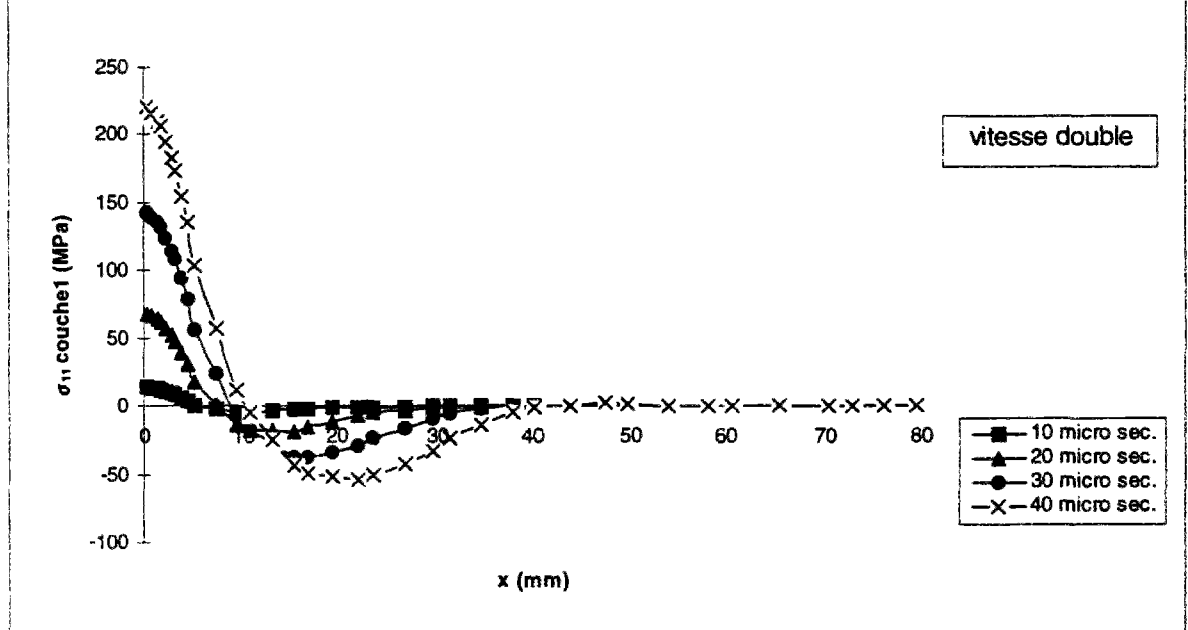


fig.7.31c.- Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion



La conclusion que nous pouvons tirer est qu'une augmentation de la vitesse a pour effet d'augmenter l'amplitude de l'onde de flexion. La vitesse de propagation de l'onde par contre ne semble pas affectée.

● *Effet de l'épaisseur de la plaque*

Les calculs ont été effectués pour trois valeurs usuelles d'épaisseur totale: $h=3.81\text{mm}$, $h=4.29\text{mm}$ et $h=4.77\text{mm}$.

fig.7.32a.- Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion

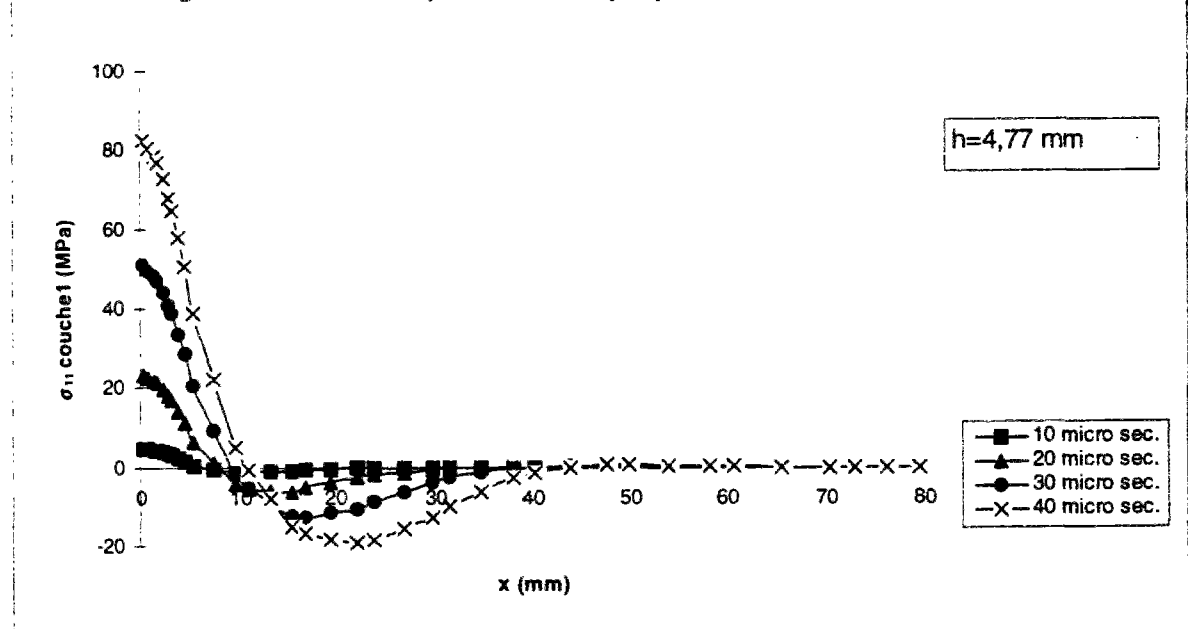


fig.7.32b.- Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion

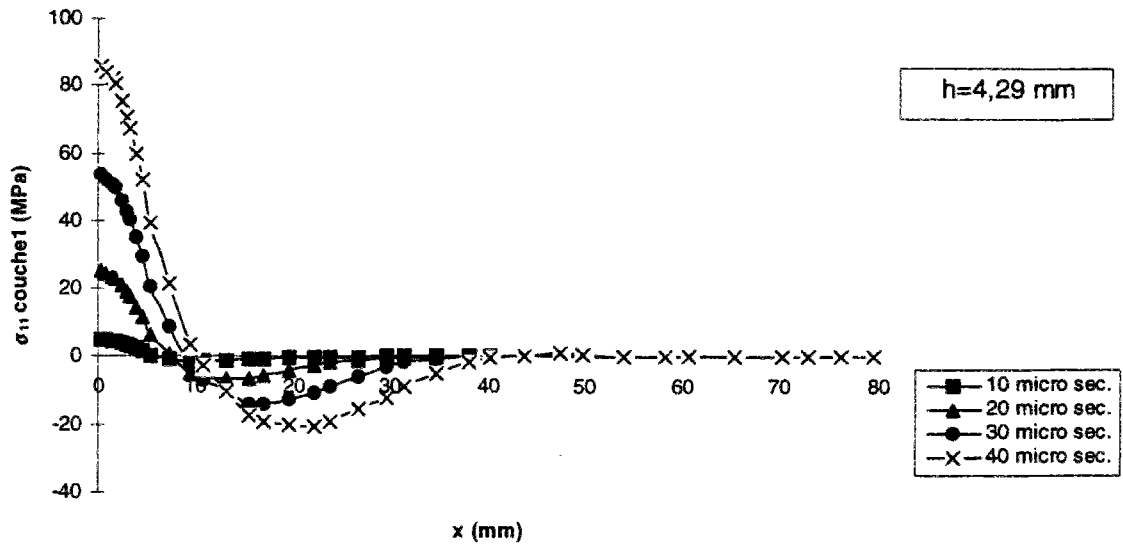
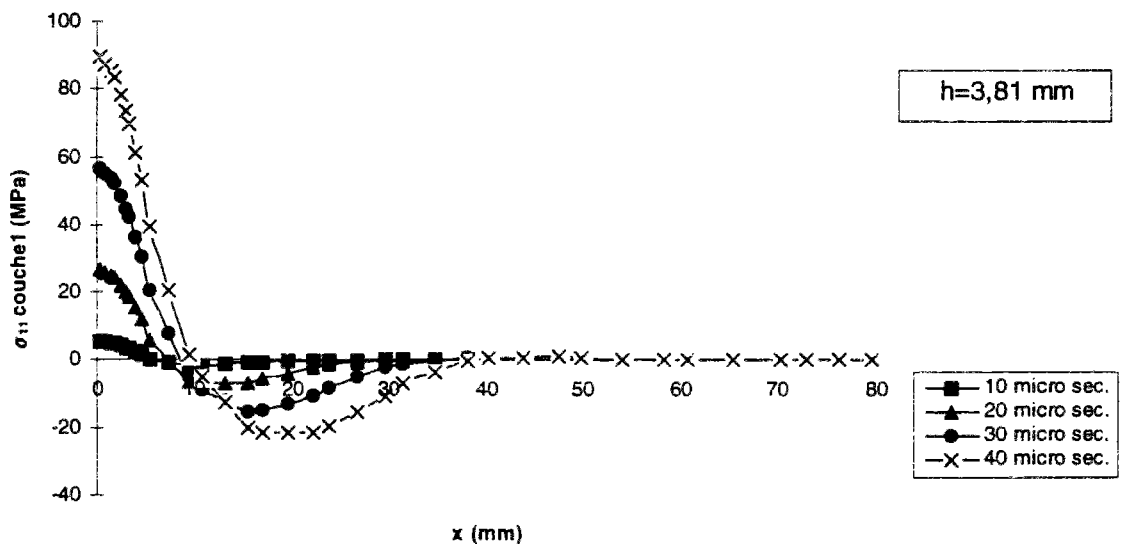


fig.7.32c.- Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion



Les résultats illustrés par les courbes des figures 7.32.a-b-c montrent que la valeur de l'épaisseur a peu d'effet sur l'amplitude de l'onde de flexion. Son effet sur la vitesse de propagation de cette onde est plus appréciable; une augmentation de l'épaisseur a pour effet d'augmenter légèrement cette vitesse de propagation.

c) Conclusion

Des travaux antérieurs [N.Takeda (1980), N.Takeda & col. (1981.a-b, 1982)] ont soutenu la thèse qu'une relation étroite relie la propagation des ondes de flexion

au délaminage et plus particulièrement à la propagation du délaminage dans les interfaces.

Si cette relation est confirmée et spécifiée, le modèle M4s, de part le fait qu'il est capable d'étudier et de décrire ces ondes, est capable de fournir rapidement et simplement les informations nécessaires à l'étude de la propagation du délaminage.

Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué dans la synthèse bibliographique (III.3.2.c), certains auteurs [*N.Takeda & col. (1982)*] affirment que la vitesse de propagation du délaminage selon l'axe X a une valeur proche de la vitesse de propagation de l'onde de flexion selon ce même axe. Si cette affirmation est confirmée, les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de conclure que:

- la masse et la vitesse du projectile n'ont pas d'influence sur la vitesse de propagation du délaminage; ce qui confirme d'ailleurs les résultats expérimentaux [*N.Takeda & col. (1982)*];
- la vitesse de propagation du délaminage augmente légèrement avec l'épaisseur totale de la plaque.

Par ailleurs, l'amplitude de l'onde augmente avec la masse et la vitesse du projectile.

VII.2.3. Étendue de la surface délaminée

La surface délaminée est souvent mesurée expérimentalement à partir d'observations radiographiques au scanner.

Comme nous l'avons évoqué dans la synthèse bibliographique (cf.III.3.2.c), une étude expérimentale a établi que la surface délaminée a une étendue proportionnelle à la réponse globale exprimée en termes de flèche au centre et de pression de contact [*N.Takeda & R.L.Sierakowski (1980)*].

La réponse globale constitue dans ce sens un moyen de prédiction de l'étendue de la surface délaminée. Nous nous reposons sur cette thèse pour développer notre analyse dans ce paragraphe.

Le calcul de la flèche au centre de la plaque a été effectué et validé dans un paragraphe antérieur (cf.VII.1.3.).

La réponse en termes de pression (ou de force de contact) peut fournir des informations supplémentaires, à travers notamment son amplitude et l'existence ou non d'un contact multiple. Nous commencerons donc par évoquer ce phénomène de contact multiple, avant d'étudier l'effet qu'ont certains paramètres sur la réponse globale et sur l'étendue de la surface délaminée.

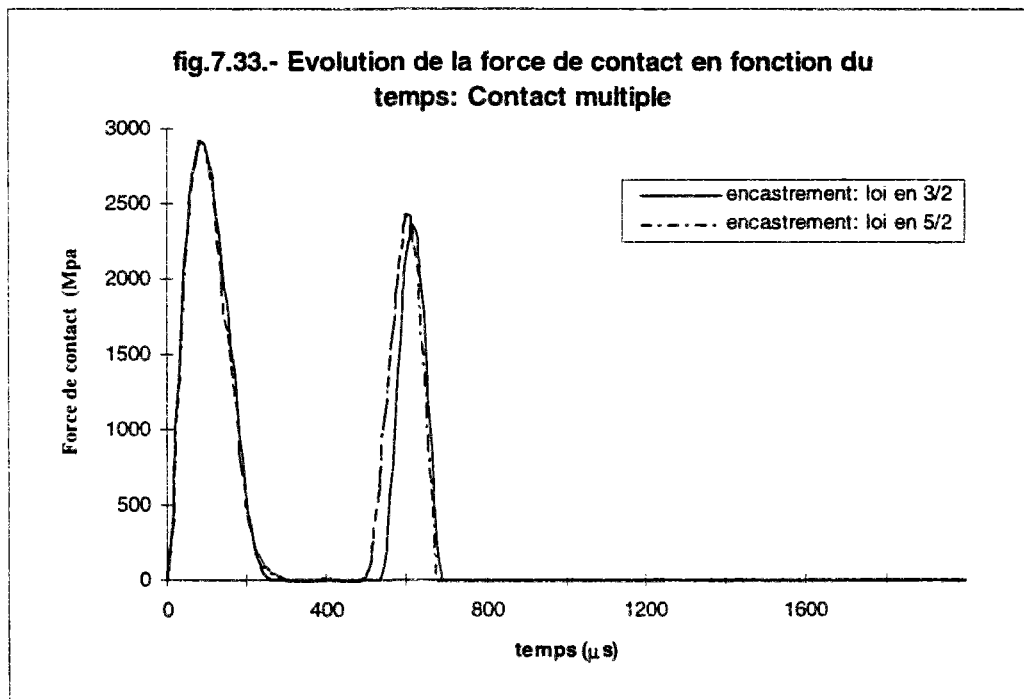
a) Le contact multiple

Depuis quelques années déjà, l'attention a été attirée par *Takeda & R.L.Sierakowski (1980)* sur l'importance qu'il faut consacrer à ce phénomène. En effet l'énergie apportée par le projectile devant être dissipée dans la structure afin d'éviter la perforation et la rupture, le contact multiple permet de dissiper en plusieurs fois cette énergie incidente.

Le fait d'avoir plusieurs contacts lors d'un impact, peut aussi diminuer les pics de pression enregistrés; nous obtenons alors une réduction de l'étendue de la surface délaminée.

Le phénomène de contact multiple a été enregistré expérimentalement par *Takeda et col. (1981b)* lors de l'étude d'un problème proche du notre. Auparavant, *Preston et Cook (1975)* ont pu prédire la possibilité d'un contact multiple dans le cas de poutres en graphite-epoxy. Plusieurs études numériques plus récentes sont venues confirmer l'existence de ce phénomène [*B.R.Petersen (1985)*, *H.Aggour & C.T.Sun (1988)*, *H.Y.T.Wu & F.K.Chang (1989)*].

Le modèle numérique que nous avons développé est capable de mettre en évidence ce phénomène (fig.7.33).



Un premier contact a lieu entre le début de l'impact et environ 300 μ s, instant auquel le projectile se sépare de la plaque. Le deuxième contact a lieu à environ 500 μ s et dure un peu moins de 200 μ s.

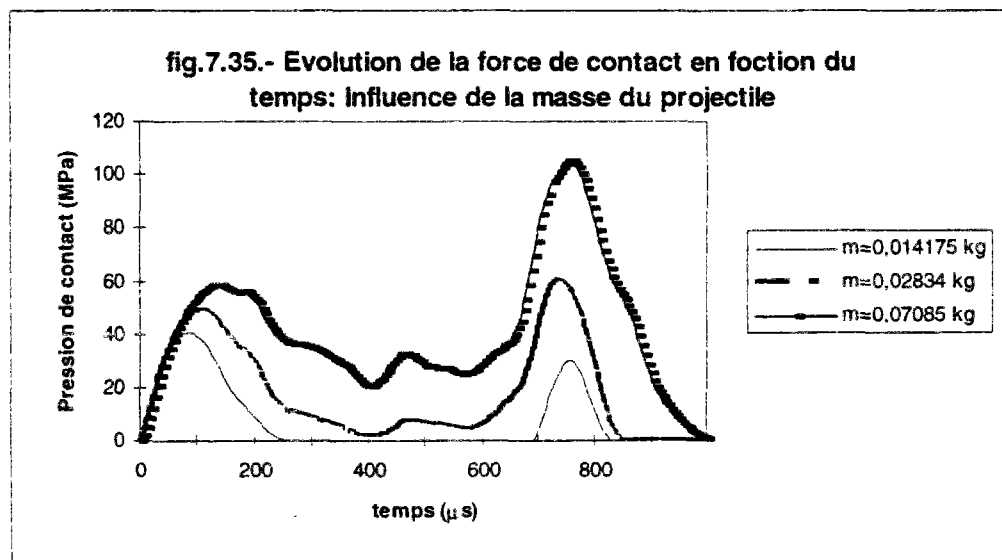
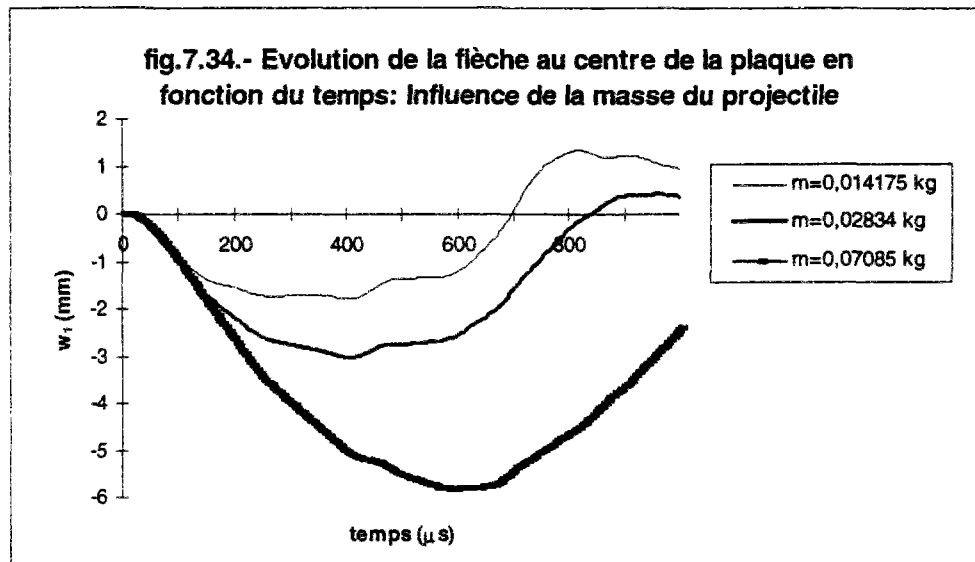
b) Influence des paramètres d'impact sur la réponse globale

Nous allons étudier ici l'effet de la masse et de la vitesse du projectile, ainsi que celui de l'épaisseur totale de la plaque.

● *Influence de la masse du projectile*

En gardant une forme cylindrique pour le projectile, nous pouvons changer sa masse en faisant varier sa longueur, son rayon ou son matériau.

Nous avons calculé la réponse globale pour plusieurs valeurs de longueur (et donc pour plusieurs valeurs de la masse m).



Les courbes des figures 7.34 et 7.35 montrent que la masse a une influence à la fois sur l'amplitude et sur la période de la réponse. L'amplitude de la réponse augmente avec la masse.

La figure 7.35 montre aussi clairement que la nature de la réponse peut évoluer en fonction de la masse. Cela confirme nos dires dans la partie bibliographique selon lesquels la vitesse à elle seule ne suffit pas pour classer les impacts.

Les calculs présentés fig.7.34 et 7.35 ne permettent pas de dégager un sens d'évolution clair de la durée de contact en fonction de la masse.

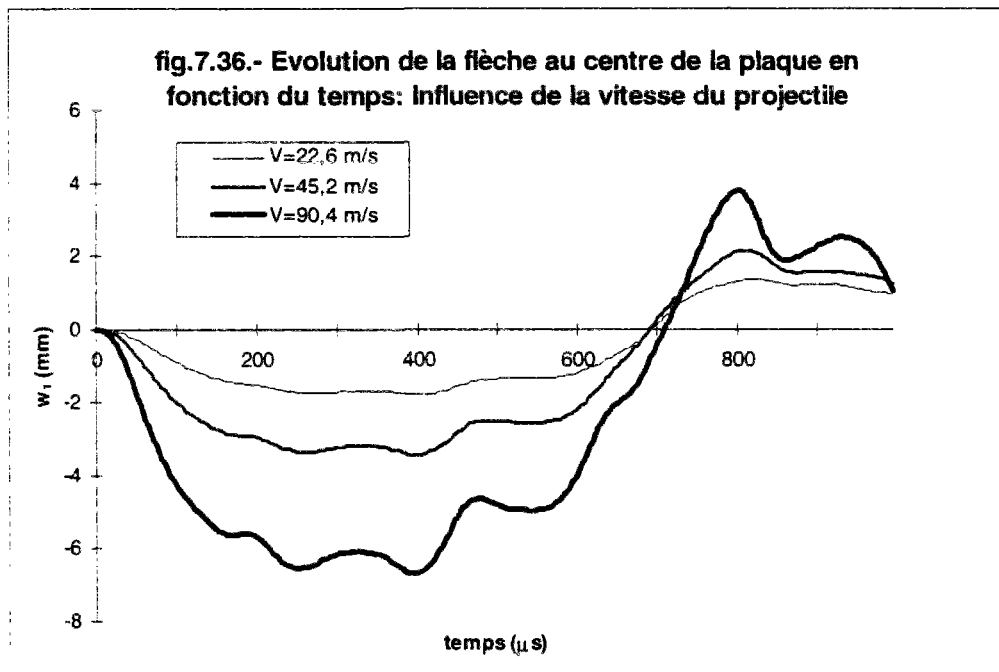
● Influence de la vitesse du projectile

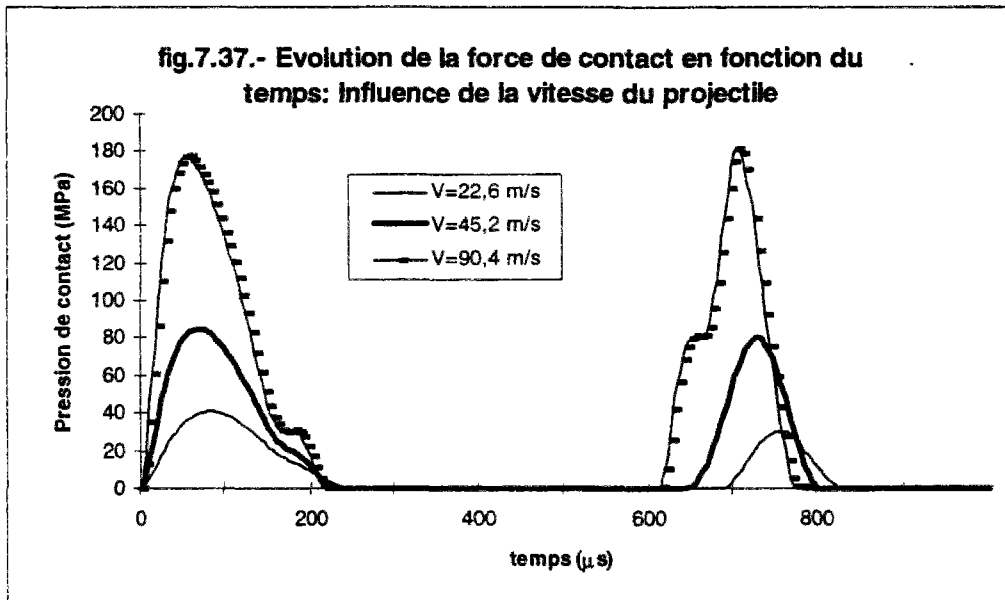
Des travaux récents mentionnés par Abrate (1994) ont montré que la surface délaminée peut dépendre de l'angle d'incidence de la vitesse du projectile.

Toutefois, il se dégage aussi de ces travaux que l'étendue de la surface endommagée ne dépend que de la composante normale de la vitesse, si bien que l'étude des impacts obliques peut se ramener à celle des impacts transverses. La réponse globale et la surface délaminée ne dépendent donc que de la composante normale de la vitesse d'impact.

Nous allons donc ici conserver une vitesse du projectile perpendiculaire à la plaque et faire varier son amplitude, tout en restant dans le cadre des impacts rapides. Nous observons alors l'effet de cette vitesse sur la réponse globale.

Les figures 7.36 et 7.37 ont été obtenues avec une vitesse de 22.6m/s, ainsi qu'avec des vitesses double et quadruple.





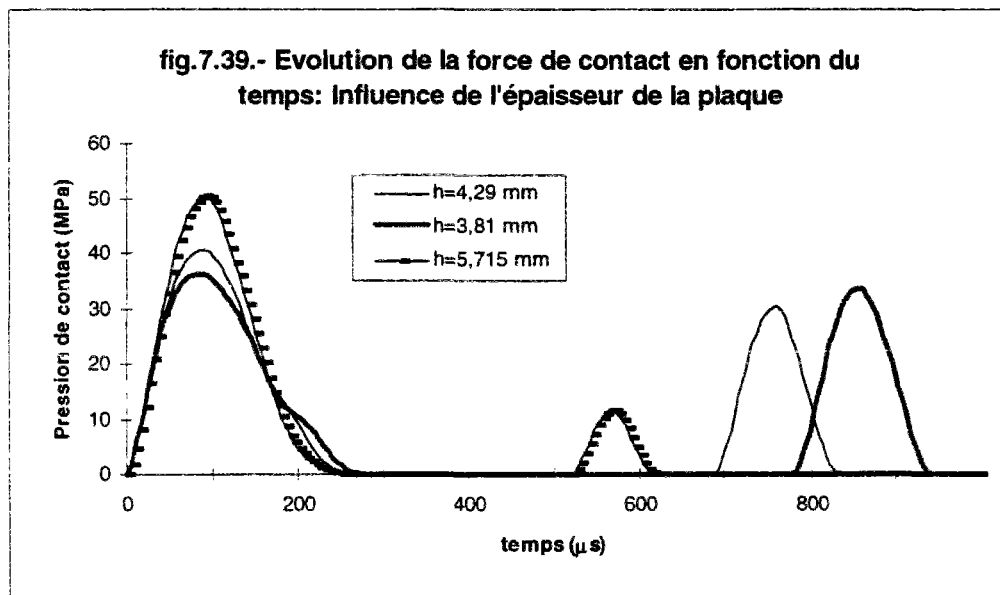
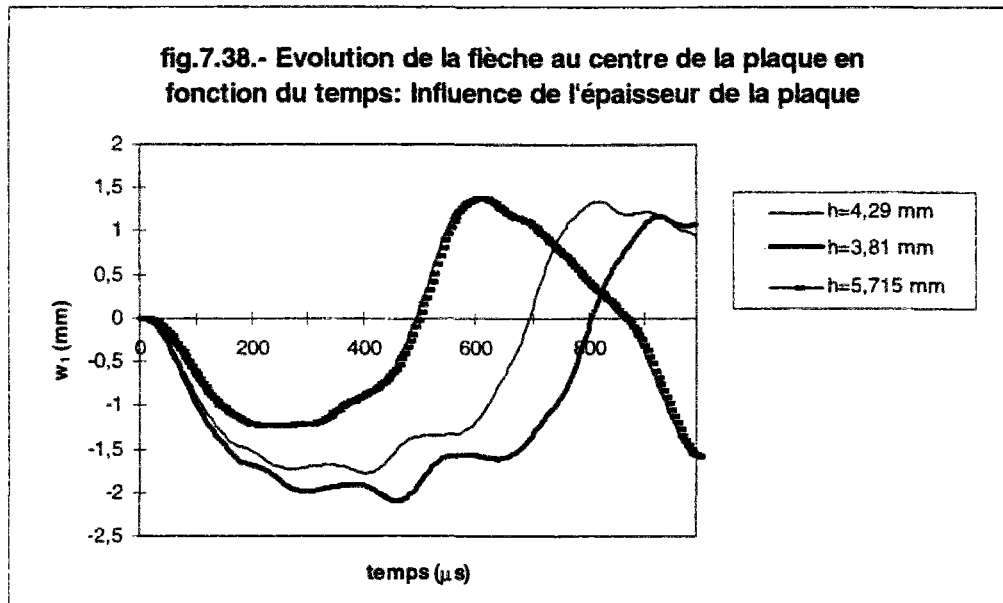
Elles montrent que la réponse globale est quasi-linéaire par rapport à la vitesse d'impact (au moins avant le deuxième contact). En effet, la période de contact, c'est à dire la durée du premier contact, reste pratiquement constante. L'amplitude de la réponse quant à elle est quasi-proportionnelle à la vitesse.

Nous pouvons retrouver ce dernier résultat, pour cet ordre de vitesse, chez plusieurs auteurs [*J.K.Chen & C.T.Sun (1985c)*, *B.R.Petersen (1985)*, *H.Aggour & C.T.Sun (1988)*, *H.Y.T.Wu & col. (1989)*]. Il rejoint un résultat expérimental largement répandu, selon lequel la surface délaminée varie linéairement en fonction de l'énergie incidente [*N.Takeda & R.L.Sierakowski (1980)*, *S.Abrate (1991)*...].

Nous noterons enfin la possibilité qu'offre le modèle de prendre en compte des vitesses de l'ordre de 300km/h (à la limite des *chocs ballistiques*), tout en conservant des courbes lisses, sans instabilités numériques.

● Influence de l'épaisseur de la plaque

Nous avons calculé la réponse pour différentes valeurs de l'épaisseur totale: $h=3.81\text{mm}$, $h=4.29\text{mm}$ et $h=5.715\text{mm}$.



La figure 7.38 montre que lorsque l'épaisseur de la plaque augmente, la réponse globale en termes de flèche au centre diminue en amplitude et en période.

La figure 7.39 montre à l'inverse que lorsque l'épaisseur de la plaque augmente, la réponse globale en terme de pression de contact augmente en amplitude et en période.

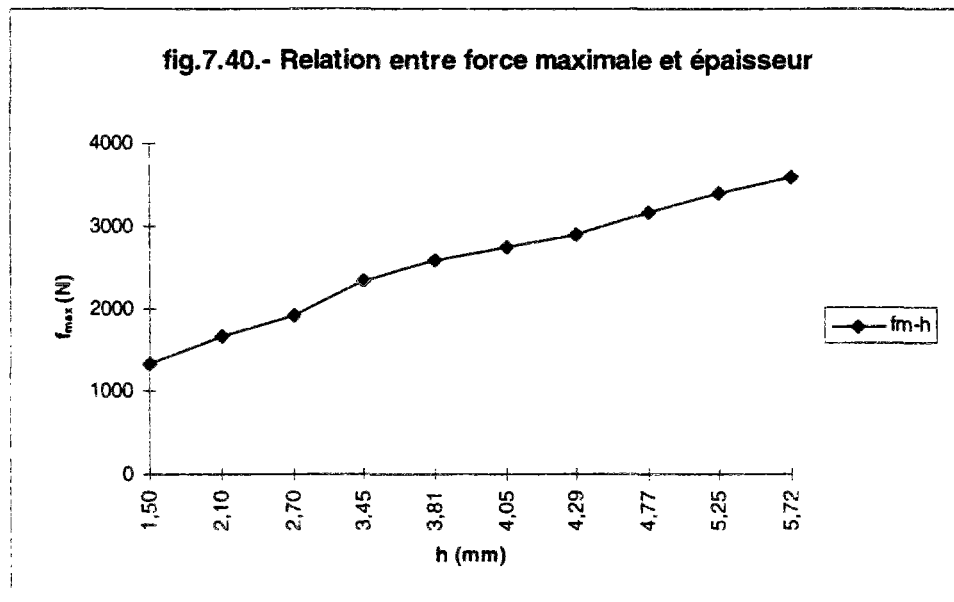
Lorsque nous changeons donc de plaque (épaisseur différente), un critère à la fois en flèche au centre et en pression n'est plus valable.

Si nous avons à choisir entre un critère uniquement en terme de flèche au centre et un critère uniquement en pression de contact, nous choisirions un critère en termes de pression.

Avec un tel critère, la figure 7.39 indiquerait alors que le délaminage est plus étendu sur les plaques les plus épaisses, ce qui rejoindrait un résultat expérimental [W.J.Cantwell & J.Morton (1989)] selon lequel la résistance à la perforation augmente avec l'épaisseur.

Sur la figure 7.39, nous remarquons que l'augmentation de l'épaisseur retarde le deuxième contact.

Nous y remarquons aussi que l'amplitude de la force de contact au premier contact est pratiquement proportionnelle à l'épaisseur. N'ayant pas rencontré une telle affirmation dans les travaux dont nous disposons, nous avons procédé à des calculs pour d'autres valeurs de l'épaisseur, couvrant à peu près la gamme des épaisseurs utilisées pour ce type de matériau. La figure 7.40 montre alors clairement que, pour une large gamme d'épaisseurs, l'amplitude maximale de la force lors du premier contact varie d'une façon quasi-linéaire en fonction de l'épaisseur des couches.



c) Conclusion

Nous avons effectué notre analyse sur la base de l'hypothèse que la réponse globale en termes de déplacement de la plaque et de force de contact est proportionnelle à l'étendue de la surface délaminée. Si cette hypothèse est confirmée, les calculs précédents montrent que:

- la surface délaminée croît quasi-linéairement avec la vitesse d'impact;
- si nous adoptons un critère en terme de pression de contact, la réponse diminuerait quand l'épaisseur de la plaque augmente.

Nous n'avons pas pu déterminer le sens d'influence de la masse du projectile sur la réponse.

VII.3. CONCLUSION

La première partie de ce chapitre a permis, après identification des différents paramètres nécessaires à notre modélisation, de valider le calcul de la réponse globale d'une plaque multicouche. Elle a permis aussi de s'assurer, qu'en choisissant ces paramètres de modélisation sans imprécision exagérée, nous obtenions des résultats proches des résultats expérimentaux. La rapidité de calcul du M4s a été mise en évidence à cette occasion.

Nous avons essayé par la suite, de montrer sur un exemple, les possibilités et l'aisance qu'offre notre code quant à l'obtention d'informations sur différents aspects du délaminage; à savoir son initiation, sa propagation et son étendue.

- Nous pensons que la contrainte de cisaillement transverse radiale τ_{rz} peut constituer un bon candidat pour l'étude de l'initiation du délaminage, et éventuellement pour définir le seuil de délaminage ou encore un critère de délaminage. Pour la plaque [0/90/0] que nous avons étudiée, le maximum de contrainte radiale τ_{rz} a été enregistré numériquement dans la direction 0° au voisinage de la limite de la zone de contact.

Cette valeur maximale de contrainte τ_{rz} augmente avec la masse et la vitesse du projectile, mais diminue avec l'épaisseur de la plaque.

- La propagation du délaminage semble être en liaison étroite avec la propagation des ondes de flexion dominantes.

Ces ondes de flexion naissent au centre de la plaque et se propagent dans le plan de la plaque avec des vitesses décroissantes et dépendantes de la direction de propagation considérée; l'onde est plus rapide dans la direction du module le plus élevé.

La vitesse de l'onde ne semble pas dépendre de la masse ni de la vitesse du projectile. Elle augmente par contre avec l'épaisseur de la plaque.

- Il a été enfin rapporté expérimentalement que l'étendue de la surface délaminée est proportionnelle à la réponse globale (flèche au centre et pression de contact). Sur la base de ce résultat, l'étude de l'effet des différents paramètres nous permet d'affirmer que la surface délaminée croît linéairement en fonction de la vitesse du projectile. Nous n'avons pas pu dégager clairement le sens d'influence de la masse du projectile sur la durée du contact.

Lorsque nous changeons de plaque (épaisseur différente), nous ne pouvons plus retenir un critère général en termes de réponse globale (à la fois en flèche au centre et en pression de contact) pour étudier l'étendue de la surface délaminée.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objet de cette étude est l'endommagement et plus particulièrement le délaminage des plaques multicouches lorsqu'elles sont soumises à l'impact de charges dynamiques. L'objectif est de pouvoir disposer d'un modèle capable de fournir simplement (naturellement) et rapidement des informations à l'interface concernant le délaminage.

Pour cela, nous sommes partis d'un modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) formulé à l'origine en statique. L'introduction d'hypothèses simplificatrices permet d'obtenir une version plus opératoire du modèle: le modèle M4 simplifié (M4s).

Le modèle M4s ne fournissant des solutions analytiques que dans des cas simplifiés de problèmes dans le cadre de la statique, nous l'avons développé numériquement et généralisé au cas dynamique.

En traitant des cas simples et classiques de problèmes en statique, nous avons pu montrer que le modèle accède simplement à des contraintes à l'interface et que ces contraintes peuvent être reliées au phénomène de délaminage. Nous avons en effet vu qu'un critère de délaminage en contrainte normale 3D moyenne peut être ramené à un critère en contrainte de cisaillement maximale à l'interface pour le modèle M4s.

Après avoir validé le modèle M4s en statique (modèle mécanique et code de calcul par éléments finis), nous l'avons développé en dynamique.

Pour tester les performances du modèle en dynamique, nous avons commencé par présenter une synthèse bibliographique sur le problème de l'impact des plaques multicouches à partir des résultats disponibles dans la littérature. Nous avons alors pu tirer plusieurs conclusions:

Une première conclusion est que le domaine où le modèle développé semble être le plus pertinent est celui des chocs rapides, là où une étude numérique est généralement nécessaire pour déterminer la réponse de la structure.

Une deuxième conclusion est que nous pouvons distinguer deux réponses de la structure: une réponse globale en termes de flèche au centre et de pression de contact, et une réponse locale en termes de champ de contraintes local au voisinage de la zone de contact. La réponse locale est d'une grande importance pour l'étude du phénomène d'endommagement et de délaminage. Pour la calculer avec précision, le contact entre la plaque et le projectile doit être défini avec soin. Dans ce cas, la force de contact doit être considérée comme une inconnue du problème. Les lois expérimentales de Yang et Sun faisant la distinction entre les phases de chargement, de décharge et de rechargement et tenant compte des

déformations permanentes qui apparaissent, semblent être les plus appropriées pour modéliser ce contact.

Sur la base de ces conclusions, nous avons achevé la construction du code de calcul par éléments finis traduisant les équations du M4s en dynamique. Ce code a été validé en étudiant le problème de l'impact d'un projectile de forme sphérique sur une plaque multicouche isotrope. L'étude de cette plaque et de l'influence de plusieurs paramètres donnés du problème a mis en évidence la rapidité de calcul et l'efficacité du modèle numérique obtenu.

Nous avons ensuite étudié un exemple de problème d'impact sur plaque multicouche composite: celui d'un projectile de forme cylindrique sur une plaque multicouche [0/90/0] orthotrope. Nous avons illustré, en nous basant sur les résultats de la synthèse bibliographique, la possibilité d'identifier à l'aide du modèle numérique les paramètres nécessaires à la modélisation du problème étudié.

Nous nous sommes par la suite intéressés à l'étude de trois aspects du délaminage: son initiation, sa propagation et son étendue.

Pour l'initiation, nous pensons que la contrainte de cisaillement radiale τ_{rz} à l'interface peut constituer un bon candidat pour l'étude de l'initiation du délaminage. Nous avons montré que cette contrainte atteint son maximum à la limite de la zone de contact, dans la direction 0° . Ce maximum d'intensité de contrainte augmente avec la masse et la vitesse du projectile et diminue avec l'épaisseur totale de la plaque.

En s'aidant de ces résultats, des études expérimentales peuvent être entreprises pour définir un critère de délaminage simple en fonction de τ_{rz} (et éventuellement $\tau_{\theta z}$), et pour étudier l'influence des données du problème sur le seuil de délaminage.

La propagation du délaminage dans les interfaces semble, d'après des résultats expérimentaux, en relation étroite avec la propagation des ondes de flexion dominantes. Nous avons illustré la capacité du modèle M4s à décrire et à étudier ces ondes de flexion. La vitesse de ces ondes ne semble dépendre ni de la masse ni de la vitesse du projectile. Elle augmente légèrement avec l'épaisseur totale de la plaque.

L'étendue de la surface délaminée est en relation avec la réponse globale de la plaque en termes de flèche au centre et de pression de contact. Des résultats expérimentaux affirment qu'elle est proportionnelle à cette réponse globale. Nous avons pu montrer que l'amplitude de la réponse globale croît linéairement avec la vitesse initiale du projectile (et donc avec l'énergie cinétique incidente). En changeant l'épaisseur de la plaque, nous changeons en fait de plaque. Un critère à la fois en flèche au centre et en pression de contact n'est alors plus valable pour étudier l'étendue de la surface délaminée.

Pour ces trois aspects du délaminage, nous avons basé notre étude de sur des résultats expérimentaux fiables certes, mais relativement peu récents. Des études expérimentales doivent être entreprises pour mieux spécifier la relation contraintes d'interface- délaminage, la relation propagation des ondes- propagation du délaminage et la relation réponse globale- surface délaminée.

Pour ce qui est du modèle mécanique M4, la version simplifiée en constitue une version simple et opératoire. La démarche finale d'identification des rigidités à l'interface n'a pas encore été arrêtée, mais le code de calcul tel qu'il a été construit, permet facilement d'adopter telle démarche ou telle autre, par un simple changement au niveau de la formule de calcul de la matrice de rigidité d'interface élémentaire.

Du côté du développement numérique, plusieurs améliorations peuvent être apportées au code de calcul développé avant qu'il soit optimisé au point de vue rapidité des calculs et mémoire de stockage. L'introduction du schéma des différences centrales et l'adoption d'une structure diagonale pour la matrice masse s'inscrivent dans le cadre de ces améliorations. Une fois le code de calcul optimisé, on peut traiter différents types d'empilement et étudier par exemple l'influence de la séquence d'empilement sur la réponse globale et locale.

Dans toute l'étude que nous avons menée, nous avons supposé que le matériau reste vierge (non endommagé). On peut envisager d'inclure l'effet de délaminage (et plus généralement de l'endommagement), en traduisant cet effet par une variation (chute) dans les valeurs des rigidités à l'interface. Dans ce sens, la matrice de rigidité d'interface élémentaire telle qu'elle a été construite, permet de prendre en considération de manière simple ces changements. L'introduction de l'effet du délaminage constitue une suite logique à donner à ce travail.

ANNEXE I.a

EXPRESSION DES MATRICES INTERVENANT DANS LA DECOMPOSITION PAR ELEMENTS FINIS

n désigne le nombre de couches, p=8 le nombre de noeuds par éléments

* Matrices de rigidité

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{K}}^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ sym & & \tilde{\tilde{K}}^n \end{pmatrix} \text{ de taille } 3n*3n$$

$$K_\tau = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{K}}_\tau^{1,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ sym & & \tilde{\tilde{K}}_\tau^{n-1,n} \end{pmatrix} 2(n-1)*2(n-1)$$

$$K_v = \begin{pmatrix} K_v^{1,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ sym & & K_v^{n-1,n} \end{pmatrix} (n-1)*(n-1)$$

$$K_\theta = \begin{pmatrix} K_\theta^{1,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ sym & & K_\theta^{n-1,n} \end{pmatrix} (n-1)*(n-1)$$

$$K_\mu = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{K}}_\mu^{1,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ sym & & \tilde{\tilde{K}}_\mu^{n-1,n} \end{pmatrix} 2(n-1)*2(n-1)$$

*** Matrice Q**

$$Q = [P_1, \dots, P_p] \quad 3n \times 3np$$

$$\text{avec } P_j = \begin{pmatrix} L_j & 0 \\ & O \\ 0 & L_j \end{pmatrix} \quad 3n \times 3n$$

$$\text{avec } L_j = \begin{pmatrix} N_{j,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{j,2} & 0 \\ N_{j,2} & N_{j,1} & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

*** Matrice O**

$$O = [O_1, \dots, O_p] \quad (n-1) \times 3np$$

$$\text{avec } O_j = \begin{pmatrix} R_j & S_j & 0 & 0 \\ & O & O & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & R_j & S_j \end{pmatrix} \quad (n-1) \times 3n$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_j = [0, 0, -N_j] \\ S_j = [0, 0, +N_j] \end{cases} \quad 1 \times 3$$

*** Matrice T**

$$T = [T_1, \dots, T_p] \quad 2(n-1) \times 3np$$

$$\text{avec } T_j = \begin{pmatrix} S_{1,j} & 0 \\ & O \\ 0 & S_{n-1,j} \end{pmatrix} \quad 2(n-1) \times 3n$$

$$\text{avec } S_{ij} = \begin{bmatrix} -N_j & 0 & \frac{e^i}{2}N_{j,1} & N_j & 0 & \frac{e^{i+1}}{2}N_{j,1} \\ 0 & -N_j & \frac{e^i}{2}N_{j,2} & 0 & N_j & \frac{e^{i+1}}{2}N_{j,2} \end{bmatrix} \quad 2*6$$

* Matrice \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = [H_1, \dots, H_p] \quad 2(n-1)*3np$$

$$\text{avec } H_j = \begin{pmatrix} \Phi_{1j} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \Phi_{n-1j} \end{pmatrix} \quad 2(n-1)*3n$$

$$\text{avec } \Phi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -N_{j,1} & 0 & 0 & N_{j,1} \\ 0 & 0 & -N_{j,2} & 0 & 0 & N_{j,2} \end{bmatrix} \quad 2*6$$

* Matrice Δ

$$\Delta = [\Omega_1, \dots, \Omega_p] \quad (n-1)*3np$$

$$\text{avec } \Omega_j = \begin{pmatrix} \Gamma_j & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \Gamma_j \end{pmatrix} \quad (n-1)*3n$$

$$\text{avec } \Gamma_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N_{j,1} & -\frac{1}{2}N_{j,2} & 0 & -\frac{1}{2}N_{j,1} & \frac{1}{2}N_{j,2} & 0 \end{bmatrix} \quad 1*6$$

* Matrice Π

$$\Pi = [W_1, W_2, \dots, W_p] \quad 3n * 3np$$

$$W_s = \begin{bmatrix} N_s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_s \end{bmatrix} \quad 3n * 3n$$

* Matrice Θ^e

$$\Theta^e = [\Theta_{ij}] \quad 3np * 3np$$

$$\Theta_{ij} = N_i \cdot N_j \cdot \begin{pmatrix} \rho^I I_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho^a I_3 \end{pmatrix} \quad 3n * 3n.$$

* Matrice N

$$N = [N_1, \dots, N_p]$$

ANNEXE I.b

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans cet annexe, nous présentons succinctement la méthode des éléments finis et ses concepts de base.

INTRODUCTION AUX ÉLÉMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une technique qui permet de transformer un problème formulé sous forme variationnelle ou différentielle, en un système algébrique linéaire, pouvant être résolu numériquement. Cela permet de remplacer un système continu (ddl en nombre infini), par un système discrétisé équivalent, où les inconnues sont en nombre fini.

La géométrie (bidimensionnelle dans le cas du M4) est d'abord décomposée en une partition d'**éléments** appelés **mailles**. Le comportement de chaque élément est représenté par une matrice de rigidité élémentaire, construite grâce aux hypothèses de la mécanique des milieux continus.

A partir des matrices élémentaires, on construit un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de **continuité de déplacement** et d'équilibre des forces, au niveau des points de jonction des éléments, appelés **noeuds**.

La résolution du système d'équations algébriques, correspondant à des sollicitations données, permet alors le calcul des déplacements de tous les noeuds

de la structure. Ces déplacements sont en fait les inconnues du problème. Ils sont appelés **déplacements nodaux**.

Le **déplacement élémentaire** \underline{u}^e au niveau de chaque élément est ensuite exprimé en fonction de ces déplacements nodaux, grâce à l'introduction de fonctions d'interpolation N_i , appelées aussi **fonctions de forme**. On procède ainsi à une **approximation nodale** par sous-domaines, appelée aussi approximation par éléments finis.

Les contraintes peuvent enfin être obtenues à partir des lois de comportement mécanique et des déplacements.

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS- CHOIX

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts:

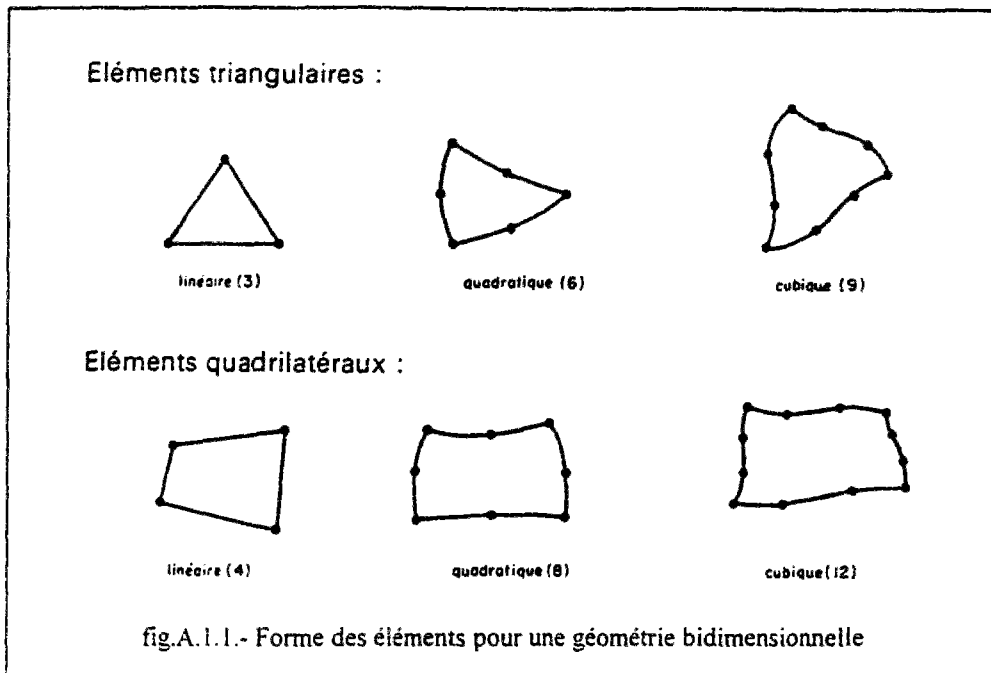
- l'**approximation de la géométrie**;
- l'**approximation du déplacement**.

Premier choix: Approximation de la géométrie

L'approximation de la géométrie de la structure consiste à définir les éléments ou mailles qui la représentent. Les noeuds géométriques $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ sont alors définis.

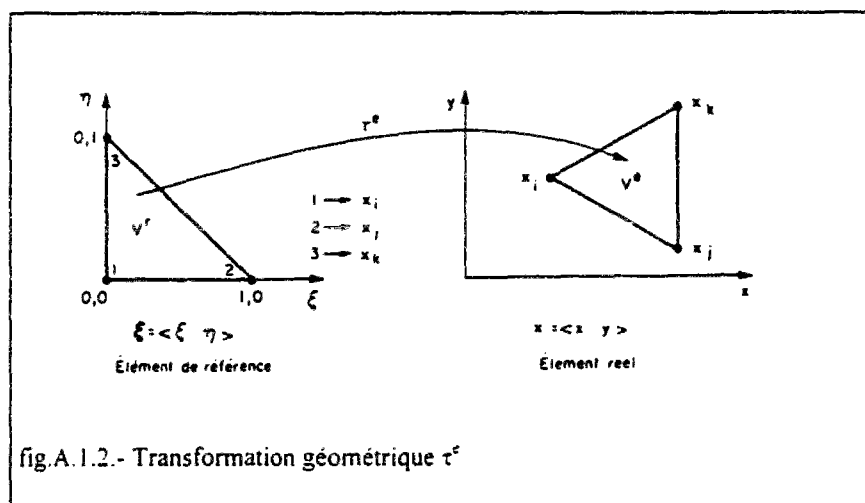
Ces éléments peuvent être de forme plus ou moins compliquée. Dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle, l'élément choisi peut avoir la forme d'un triangle ou

d'un quadrilatère, avec des côtés représentés par des courbes du 1^{er}, 2^{ème} ou 3^{ème} degré (figure A.1.1).



Pour faciliter la définition analytique de ces éléments, on introduit la notion d'**élément de référence**. C'est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, et pouvant être transformé en chaque élément réel de même type, grâce à une **transformation géométrique** τ^e dépendant de la forme et de la position de l'élément réel:

$$\tau^e: \xi_r = (\xi, \eta) \rightarrow X(\xi_r) = (x(\xi_r), y(\xi_r))$$



En utilisant une transformation τ^e linéaire par rapport aux coordonnées $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ des **noeuds géométriques** de l'élément réel, on peut écrire:

$$x(\xi_r) = \sum N_i(\xi_r).x_i = N. \{x_n\} \quad (\text{A.1.1})$$

$$y(\xi_r) = \sum N_i(\xi_r).y_i = N. \{y_n\} \quad (\text{A.1.2})$$

Les fonctions N_i sont appelées **fonctions de transformation géométrique**. Elles permettent d'obtenir une approximation nodale par sous-domaines des fonctions $x(\xi_r)$ et $y(\xi_r)$, coordonnées d'un point courant de l'élément réel.

Deuxième choix: Approximation du déplacement

L'approximation du déplacement revient à écrire la relation qui relie le déplacement \underline{u}^e à l'intérieur d'un élément aux déplacements des noeuds (déplacements nodaux) de cet élément.

Ces noeuds, dits **noeuds d'interpolation**, de coordonnées $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$ peuvent ou non être confondus avec les noeuds géométriques $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$.

Le déplacement élémentaire \underline{u}^e au point $X=(x,y)$ de l'élément réel peut être exprimé par:

$$\underline{u}^e(X) = \sum N_i(X). \underline{u}_i \quad (\text{A.1.3})$$

Le plus souvent, on choisit d'avoir des fonctions de transformation géométrique N_i et des fonctions de forme N_i identiques. Les noeuds d'interpolation sont alors confondus avec les noeuds géométriques. L'élément est alors un **élément**

isoparamétrique, et on peut écrire à l'aide des mêmes fonctions N_i et de la transformation τ^e :

$$x(\xi_r) = \sum N_i(\xi_r) \cdot x_i = {}^tN \cdot \{x_n\} \quad (\text{A.1.4})$$

$$y(\xi_r) = \sum N_i(\xi_r) \cdot y_i = {}^tN \cdot \{y_n\}$$

$$\underline{u}^e(X(\xi_r)) = \sum N_i(\xi_r) \cdot \underline{u}_i = {}^tN \cdot \{\underline{u}_n\} \quad (\text{A.1.5})$$

Pour chaque élément réel, on peut associer à la transformation géométrique τ^e une matrice J . Cette matrice représentant τ^e est appelée **matrice jacobienne**.

Elle peut être définie par: $\{\partial_{\xi}\} = J \cdot \{\partial_X\}$, ce qui donne:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.6})$$

L'inverse j de la matrice jacobienne est définie par:

$$j = J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.7})$$

Si tous les angles intérieurs de l'élément réel courant ont une mesure inférieure à 180° , le déterminant $\det J$ de J est non nul, et la transformation τ^e est bijective.

Troisième choix: Les fonctions de forme

Le choix des fonctions de forme est tributaire du choix de l'élément (1^{er} et $2^{\text{ème}}$ choix) et du degré d'interpolation. Le choix du degré d'interpolation des fonctions

de forme dépend essentiellement de l'ordre de dérivation des fonctions de forme dans le calcul des déformations [M.Smaoui (1993)].

Une fois les fonctions de forme choisies, la définition de la matrice jacobienne (4.5) et l'expression des coordonnées (4.3) en fonction des coordonnées nodales permettant d'obtenir l'expression matricielle:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi_r)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_p(\xi_r)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi_r)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_p(\xi_r)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_p & y_p \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où p désigne le nombre de noeuds par élément.

C'est cette expression qui est à la base du calcul des matrices de rigidité et de masse élémentaires (cf.annexe.I.c).

En résumé:

Si l'on choisit d'avoir un élément isoparamétrique, les choix qui restent à faire concernent:

- la forme de l'élément (triangulaire, quadrilatéral);
- le nombre de noeuds p par élément;
- le degré d'interpolation des fonctions de forme.

ANNEXE I.c

CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

On se place dans le cadre du modèle M4 découplé.

Comme nous l'avons dit au paragraphe I.3.2., la matrice de rigidité globale pour le M4 découplé est obtenue par assemblage des différentes matrices de rigidité élémentaires et s'exprime par:

$$K^e = \int_{\omega^e} [{}^1Q.K.Q + {}^1T.K_T.T + {}^1O.K_v.O + {}^1\xi.K_\mu.\xi + {}^1\Delta.K_\theta.\Delta] d\omega$$

Nous nous contentons ici de détailler le calcul du terme $I = \int_{\omega^e} {}^1T.K_T.T d\omega$.

Ce terme présente un intérêt particulier, d'abord par le fait qu'il fait intervenir des termes de rigidité d'interface, et ensuite parce qu'il offre, par la façon dont il est calculé, la possibilité de programmer simplement le modèle M4 $2n+1$ (cf.I.4.2.) à partir du modèle M4s.

Calcul de la matrice de rigidité d'interface

Pour le calcul de I, nous nous plaçons dans le cadre du M4s.

Le calcul de I se fait en deux étapes:

- d'abord la détermination des matrices T et K_I ;
- ensuite le calcul numérique de l'intégrale $\int_{\omega^e} {}^1T.K_T.T d\omega$.

Nous présenterons à la fin de cet annexe l'algorithme de calcul de K^e .

Calcul de T et K_T

Nous partons du terme d'énergie de déformation interne $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,j+1} \cdot \tilde{\tau}^{i,j+1}$ intervenant dans la formulation variationnelle (1.46).

Nous avons (1.17) $\tilde{D}^{i,j+1} = \tilde{U}^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} \text{grad } U_3^{i+1} + \frac{e^i}{2} \text{grad } U_3^i - \tilde{U}^i$

qui s'écrit encore

$$D_k^{i,j+1} = U_k^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} U_{3,k}^{i+1} + \frac{e^i}{2} U_{3,k}^i - U_k^i \quad (k=1 \text{ ou } 2) \quad (\text{A.1.9})$$

L'équation (4.8) du paragraphe I.3.2 permet alors d'écrire

$$D_k^{i,j+1} = \sum_{s=1}^8 N_s \cdot U_{sk}^{i+1} - \sum_{s=1}^8 N_s \cdot U_{sk}^i + \frac{e^{i+1}}{2} \cdot \sum_{s=1}^8 N_{s,k} \cdot U_{s3}^{i+1} + \frac{e^i}{2} \cdot \sum_{s=1}^8 N_{s,k} \cdot U_{s3}^i \quad (\text{A.1.10})$$

Nous considérons par exemple le premier des quatre termes de cette somme.

Matriciellement il s'écrit:

$$\sum_{s=1}^8 N_s \cdot U_{s1}^{i+1} = [N_1, \dots, N_8] \cdot \begin{bmatrix} U_{1k}^{i+1} \\ \vdots \\ U_{8k}^{i+1} \end{bmatrix}$$

Plaçons-nous dans le cas $k=1$. Nous effectuons alors une expansion de l'expression précédente, dans le but de faire apparaître le vecteur déplacements nodaux élémentaire U^e :

$$\sum_{s=1}^8 N_s U_{sk}^{i+1} = [\dots N_1, \dots, N_2, \dots, N_8, \dots] \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ U_{11}^{i+1} \\ \vdots \\ U_{81}^{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

rang ... $3i+1$... $3n+3i+1$...

Sans changer la valeur de cette expression, nous pouvons remplacer le vecteur colonne de droite par le vecteur U^e .

La même opération est effectuée avec la composante 2 ainsi qu'avec les 3 autres termes de l'expression (A.1.10). La somme des quatre termes donne alors:

$$\tilde{D}^{i,i+1} = \begin{bmatrix} \dots -N_1 & 0 & \frac{e^i}{2} N_{1,1} & N_1 & 0 & \frac{e^{i+1}}{2} N_{1,1} \dots -N_2 \dots \\ \dots 0 & -N_1 & \frac{e^i}{2} N_{1,2} & 0 & N_1 & \frac{e^{i+1}}{2} N_{1,2} \dots 0 \dots \end{bmatrix} \cdot U^e$$

que l'on notera par $\tilde{D}^{i,i+1} = \Delta^{i,i+1} \cdot U^e$

Le terme général dans cette expression est (cf.annexeI.a):

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -N_j & 0 & \frac{e^i}{2} N_{j,1} & N_j & 0 & \frac{e^{i+1}}{2} N_{j,1} \\ 0 & -N_j & \frac{e^i}{2} N_{j,2} & 0 & N_j & \frac{e^{i+1}}{2} N_{j,2} \end{bmatrix} \quad (A.1.11)$$

Reprenons le terme d'énergie interne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,i+1} \tilde{x}^{i,i+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,i+1} \cdot \tilde{K}^{i,i+1} \tilde{D}^{i,i+1} \\ &= {}^t U^e \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Delta^{i,i+1} \cdot \tilde{K}_r^{i,i+1} \Delta^{i,i+1} \right] \cdot U^e \end{aligned}$$

Une nouvelle expansion permet alors d'écrire matriciellement:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,i+1} \tilde{\tau}^{i,i+1} = {}^t U^e \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & \Delta^{i,i+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{i,i+1} \\ & & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta^{i,i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U^e$$

Sans changer la valeur du produit, nous pouvons écrire:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,i+1} \tilde{\tau}^{i,i+1} = {}^t U^e \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & \Delta^{i,i+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{1,2} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{n-1,n} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta^{1,2} \\ \vdots \\ \Delta^{n-1,n} \end{bmatrix} \cdot U^e$$

Il suffit alors de poser $T = \begin{bmatrix} \Delta^{1,2} \\ \vdots \\ \Delta^{n-1,n} \end{bmatrix}$ et $K_{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{1,2} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{n-1,n} \end{bmatrix}$

pour pouvoir écrire:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} \Delta^{i,i+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = {}^t T$$

d'où enfin

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{D}^{i,i+1} \tilde{\tau}^{i,i+1} = {}^t U^e \cdot [T \cdot K_{\tau} \cdot T] \cdot U^e$$

Le fait de séparer, jusqu'au bout des calculs, les termes de rigidité K_{τ} des termes de déformations T présente l'avantage de pouvoir changer directement les valeurs de rigidité d'interface, sans changer l'algorithme de calcul. Cela sera utile si l'on voulait tenir compte ultérieurement du changement de comportement (chute de rigidité d'interface par exemple) lors de l'impact. Nous nous inscrivons là dans une perspective d'utilisation ultérieure du code numérique que nous développons.

Les matrices T et K_r étant explicitées, il reste maintenant à calculer numériquement l'intégrale $I = \int_{\omega} {}^t T \cdot K_r T d\omega$.

$$\text{Calcul numérique de } I = \int_{\omega} {}^t T \cdot K_r T d\omega$$

A la différence de la matrice membranaire Q classique, la matrice T , fait intervenir des fonctions de forme N_i en plus de leurs dérivées (voir expression de Q en annexe III.a).

Grâce à la transformation géométrique τ^e (voir annexe III.b.), nous pouvons par changement de variable, transformer l'intégrale calculée sur l'élément réel en une intégrale calculée sur l'élément de référence:

$$I = \int_{\omega} {}^t T(X) \cdot K_r T(X) d\omega = \int_{\omega^e} {}^t T(X(\xi_r)) \cdot K_r T(X(\xi_r)) \cdot \det J \cdot d\xi d\eta \quad (\text{cf. annexe I.b}).$$

(A.1.12)

Grâce à l'utilisation de l'élément de référence, nous pouvons ainsi remplacer le calcul compliqué de $N(X)$ et $N_{,x}(X)$ dans la matrice $T(X)$, par celui plus simple de $N(\xi_r)$ et $N_{,x}(\xi_r)$ dans $T(X(\xi_r))$, évalués sur l'élément de référence.

En utilisant l'inverse j de la matrice jacobienne (cf. annexe I.b.), nous pouvons établir les expressions suivantes:

$$N_i(X(\xi_r)) = N_i(\xi_r) \quad (\text{A.1.13})$$

$$N_{i,k}(X(\xi_r)) = j_{k1} \cdot N_{i,\xi}(\xi_r) + j_{k2} \cdot N_{i,\eta}(\xi_r) \quad (\text{A.1.14})$$

Les calculs s'en trouvent alors simplifiés; ainsi pour calculer la matrice T , il suffit de calculer, une fois pour toutes, les valeurs de $N_i(\xi_r)$ et $N_{i,x}(\xi_r)$ sur l'élément de référence, et de calculer, pour chacun des éléments ω^e , les termes de la matrice j et le déterminant $\det J$.

Reprenons l'expression (4.7) de l'annexe I.b:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi_r)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi_r)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi_r)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi_r)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.15})$$

Dans l'intégrale $I = \int_{\omega} T(X(\xi_r)) \cdot K_r \cdot T(X(\xi_r)) \cdot \det J \cdot d\xi d\eta$, nous pouvons alors exprimer:

$$\begin{aligned} J &= J(N_{i,x}(\xi_r), X_n) \\ j &= J^{-1} \\ T &= T(N_i(\xi_r), N_{i,x}(\xi_r), j) \end{aligned}$$

L'intégrale I est ensuite évaluée en utilisant la technique d'intégration numérique de Gauss à deux dimensions [G.Dhatt, G.Touzot (1984)], qui permet d'approximer l'intégrale par une somme discrète sur des points appelés points de Gauss:

$$I = \sum_{r \in \text{Gauss}} w_r \cdot T(X(\xi_r)) \cdot K_r \cdot T(X(\xi_r)) \cdot \det J(\xi_r) \quad (\text{A.1.16})$$

où w_r est un coefficient de pondération numérique calculé ici par la méthode produit [G.Dhatt, G.Touzot (1984)].

Pour construire des méthodes de type Gauss, qui intègrent avec exactitude des monômes de degré $(2n_1-1) \cdot (2n_2-1)$, il faut utiliser n_1 points de Gauss selon ξ et n_2 points selon η [G.Dhatt, G.Touzot (1984)].

Dans le cas de la matrice K^c , et au vu des expressions des fonctions de forme et de leurs dérivées, nous avons:

- pour les rigidités membranaires $2n_1-1=2n_2-1 \geq 2$, ce qui donne $n_1=n_2=2$;

- pour les rigidités d'interface $2n_1-1=2n_2-1 \geq 3$, ce qui donne encore $n_1=n_2=2$.

Pour le calcul de la matrice de rigidité, il suffit donc de 2×2 points de Gauss par élément. Toutefois, le calcul de la matrice M nécessitant par ailleurs 3×3 points par élément, nous avons choisi d'utiliser ce même nombre de 9 points pour tous les calculs. Cela permettra aussi d'avoir des points de Gauss rapprochés des bords lors du calcul des contraintes, ce qui présente un intérêt pour l'étude des effets de bord (cf.§II.3.).

Algorithme de calcul de K^e

Les algorithmes de calcul des différentes matrices élémentaires sont assez similaires. Nous allons en détailler celui de K^e .

Pour réduire le nombre des opérations nécessaires, une phase de pré-traitement précède le calcul proprement dit sur l'ensemble des éléments (traitement des éléments).

La phase de pré-traitement sur l'élément de référence comporte:

- le calcul des coordonnées et des coefficients de pondération des points de Gauss;
- le calcul des valeurs des fonctions de forme et de leurs dérivées premières en chacun des points de Gauss de l'élément de référence

La boucle sur les éléments comporte:

- le calcul des coordonnées des noeuds de l'élément;
- une boucle sur les points de Gauss avec:
 - calcul de J, j et $\det J$;
 - calcul des dérivées $N_{,x}$ en ce point de Gauss (cf.A.1.14);
 - construction de la matrice Q ;
 - construction des matrices T, O, f et Δ ;
 - calcul de $(K.\det J.w_r)$;
 - calcul de $(K_t.\det J.w_r), \dots$;
 - calcul de $VK = w_r \cdot Q \cdot K \cdot Q \cdot \det J$ en ce point de Gauss;
 - calcul de $VKi = w_r \cdot T \cdot K \cdot T \cdot \det J \dots$ en ce point de Gauss;
 - cumul des VK dans K^e_{memb} ;
 - cumul des VKi dans K^e_{int} ;
 - calcul de $K^e = K^e_{memb} + K^e_{int}$.

La matrice élémentaire K^e ainsi calculée est assemblée dans la matrice globale K (stockée sous la forme d'un vecteur), avant de passer au traitement de l'élément suivant.

Nous remarquerons pour finir, la séparation au niveau élémentaire du calcul de la matrice de rigidité membranaire K^e_{memb} et de la matrice de rigidité d'interface K^e_{int} . Cela permet entre autres de comparer les valeurs de ces rigidités et de pouvoir calculer une énergie due uniquement à la présence des interfaces.

ANNEXE III

La loi de Hertz et ses développements

Le schéma a été suggéré au siècle dernier par Hertz, en s'inspirant des lois de l'électrostatique.

La loi de Hertz a été établie à l'origine dans le cadre d'un problème élastique statique, ne tenant donc pas compte des déformations plastiques. Mais cette loi a été utilisée au delà de son domaine de validité puisqu'elle approximait les paramètres essentiels de l'impact de façon plus précise que d'autres lois tenant compte des déformations permanentes.

La construction théorique de la loi de Hertz en isotropie a été reprise par *Goldsmith* (1960);

La loi de Hertz exprimant la relation de contact entre deux sphères élastiques isotropes s'écrit:

$$F = k_c \cdot \alpha^{3/2}$$

avec le coefficient de rigidité de contact $k_c = \frac{4}{3} E \sqrt{R}$

R: la courbure relative définie par $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$;

la compliance $\frac{1}{E} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}$

$$Q_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}$$

$$Q_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}$$

E_1, E_2 et ν_1, ν_2 désignant respectivement les modules d'Young et les coefficients de Poisson des deux sphères.

L'indentation d'un plan semi-infini (c'est à dire un demi-espace infini) isotrope par une sphère également isotrope peut être conçue comme un cas limite d'application de cette loi (rayon de sphère infini).

La surface de contact est alors circulaire de rayon a , et la distribution de pression normale est donnée par:

$$p(r) = \frac{3F}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$\text{avec } a = \sqrt{R\delta} = \left(\frac{3FR}{4E}\right)^{1/3}$$

Pour un demi-espace transversalement isotrope, *Willis (1966)* a trouvé que la loi en puissance 3/2 reste valide et que la surface de contact reste circulaire. Grâce à la transformation de Fourier, il a aussi montré que cette forme devenait elliptique dans le cas d'un matériau anisotrope.

Pour une plaque isotrope transverse, la compliance $1/Q_1$ de la plaque doit être modifiée. L'extension logique est d'écrire:

$$Q_1 = \frac{E_z}{1 - \nu_{rz}\nu_{zr}}$$

On peut retrouver chez *Greszczuk (1982)* une expression plus précise pour les matériaux transversalement isotropes.

Pour étendre enfin la loi de Hertz au cas d'une sphère et d'un composite laminé, plusieurs difficultés existent:

- le matériau est anisotrope et non homogène;
- la plupart des composites laminés sont trop minces pour être représentés par des demi-espaces;
- le taux de variation des déformations n'est pas pris en compte dans la loi de Hertz.

Les deux premières difficultés peuvent être contournées en étudiant analytiquement le problème du contact entre une sphère et un composite laminé par l'élasticité tridimensionnelle. L'expérience montre toutefois, qu'une solution analytique est extrêmement difficile à obtenir, surtout lorsque l'on tient compte en phase de décharge des déformations qui apparaissent.

Nous noterons enfin que des différences de propriétés existent entre les composites laminés et les corps isotropes.

Une première différence relevée déjà par *Willis* et observée ensuite par *Fällström (1989)*, est que la surface de contact a une forme elliptique, bien que pratiquement circulaire.

A cause de l'anisotropie, Q_1 dépend de la direction. La compliance $1/Q_1$ peut alors être estimée par une intégrale moyenne sur un domaine d'amplitude 2π . Comme pour la plupart des plaques laminées $\nu_{rz}\nu_{zr} \neq 0$, la solution peut se simplifier en $Q_1 = E_z$. C'est d'ailleurs cette expression qui a inspiré *Yang et Sun (1982)* (cf.III.3.2).

TABLE DES FIGURES

Introduction

- fig.0.1. Constitution d'un stratifié ou d'une plaque multicouche [*J.M.Berthelot (1992)*]
 fig.0.2. Contrainte sur le choix de la taille des mailles 3D

Chapitre II

- fig.2.1. Poutre [0/90] en flexion: Variation de U_2 dans la couche 1 en fonction de l'abscisse
 fig.2.2. Poutre [0/90] en flexion: Variation de U_2 dans la couche 2 en fonction de l'abscisse
 fig.2.3. Poutre [0/90] en flexion: Variation de U_3 en fonction de l'abscisse
 fig.2.4. Géométrie de la plaque [0/90]_s en traction uniforme
 fig.2.5. Plaque [0/90]_s en traction uniforme: Effort de cisaillement transverse le long de l'interface 0/90
 fig.2.6. Plaque [0/90]_s en traction uniforme: Effort de cisaillement transverse entre différents modèles
 fig.2.7. Géométrie de la plaque [90/0]_s trouée en traction uniforme
 fig.2.8. Maillage pour la plaque trouée
 fig.2.9. Géométrie de la monocouche calculée par *Lekhnitskii (1963)*
 fig.2.10. Plaque monocouche à 0°: Contrainte membranaire σ_θ autour du trou
 fig.2.11. Plaque monocouche à 90°: Contrainte membranaire σ_θ autour du trou
 fig.2.12. Plaque [90/0]_s trouée: Contrainte τ_{rz} le long des radiales à 0°, 45° et 90°
 fig.2.13. Distribution radiale de σ_{rz} à l'interface $z=h$ [*I.S.Raju & J.H.Crews (1982)*]
 fig.2.14. Plaque [90/0]_s trouée: Contrainte $\tau_{\theta z}$ le long de la radiale à 45°
 fig.2.15. Distribution radiale de $\sigma_{\theta z}$ à l'interface $z=h$ [*I.S.Raju & J.H.Crews (1982)*]
 fig.2.16. Plaque [90/0]_s trouée: Contrainte $\tau_{\theta z}$ sur le bord autour du trou
 fig.2.17. Distribution de $\sigma_{\theta z}$ autour du trou à l'interface $z=h$ [*I.S.Raju & J.H.Crews (1982)*]
 fig.2.18. Plaque [90/0]_s trouée: Contrainte d'interface τ_{rz} sur le bord autour du trou

Chapitre III

- fig.3.1. Impact à faible vitesse et grande masse
 fig.3.2. Impact à grande vitesse et petite masse
 fig.3.3. Ondes de compression rapides à travers l'épaisseur
 fig.3.4. Ondes de flexion lentes dans la plaque
 fig.3.5. Réflexion des ondes de flexion
 fig.3.6. Définition de l'indentation entre deux corps en contact
 fig.3.7. Force de contact donnée: Signal en créneau [*Sun & Liou (1989)*]
 fig.3.8. Force de contact donnée: Signal en triangle [*Sun & Liou (1989)*]
 fig.3.9. Modèle masse-ressort de *Caprino & col. (1984)*
 fig.3.10. Modèle masse-ressort de *Sjoblom & col. (1988)*
 fig.3.11. Modèle masse-ressort de *Lal (1983)*
 fig.3.12. Modèle masse-ressort de *Shivakumar & col. (1985)*
 fig.3.13. Modèle simplifié de *Olsson (1992.a-b)*

Chapitre V

- fig.5.1. Géométrie du projectile et de la plaque isotrope impactée
- fig.5.2. Table des valeurs analytiques présentées par *Karas (1939)*
- fig.5.3. Maillage à 29 éléments utilisé pour la plaque isotrope impactée par un projectile sphérique
- fig.5.4. Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps
- fig.5.5. Evolution de la vitesse au centre de la plaque en fonction du temps
- fig.5.6. Evolution du déplacement du projectile en fonction du temps
- fig.5.7. Evolution de la vitesse du projectile en fonction du temps
- fig.5.8. Evolution de la force de contact en fonction du temps
- fig.5.9. Comparaison entre les courbes tracées par *Goldsmith (1960)* et celles produites par le calcul numérique M4s
- fig.5.10. Comparaison entre les précisions du calcul M4s et du calcul par éléments finis 3D de *Wu & Chang (1989)*
- fig.5.11. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.12. Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.13. Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du pas de temps sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.14. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la discrétisation dans l'épaisseur sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.15. Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la discrétisation dans l'épaisseur sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.16. Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la discrétisation dans l'épaisseur sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.17. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence du rayon de contact sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.18. Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du rayon de contact sur les résultats numériques du M4s
- fig.5.19. Evolution des vitesses du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du rayon de contact sur les résultats numériques du M4s

Chapitre VI

- fig.6.1a. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile
- fig.6.1b. Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile
- fig.6.1c. Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile
- fig.6.2a. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence du rayon du projectile
- fig.6.2b. Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du rayon du projectile
- fig.6.2c. Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du rayon du projectile
- fig.6.3. Variation de la durée de contact en fonction de la vitesse du projectile
- fig.6.4. Variation de la durée de contact en fonction du rayon du projectile

fig.6.5.	Variation du maximum de pression de contact en fonction de la vitesse du projectile
fig.6.6.	Variation du maximum de pression de contact en fonction du rayon du projectile
fig.6.7a.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la rigidité d'interface
fig.6.7b.	Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la rigidité d'interface
fig.6.7c.	Evolution des vitesses du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de la rigidité d'interface
fig.6.8a.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de l'épaisseur de la plaque
fig.6.8b.	Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de l'épaisseur de la plaque
fig.6.8c.	Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence de l'épaisseur de la plaque
fig.6.9.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence d'une faible épaisseur de la plaque
fig.6.10a.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence du type de conditions aux limites
fig.6.10b.	Evolution des déplacements du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du type de conditions aux limites
fig.6.10c.	Evolution de la vitesse du centre de la plaque et du projectile en fonction du temps: Influence du type de conditions aux limites

Chapitre VII

fig.7.1.	Evolution du déplacement du centre de la plaque en fonction du temps: Identification du coefficient de contact k_c
fig.7.2.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Identification du coefficient de contact k_c
fig.7.3.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Effet d'un grand coefficient de contact k_c
fig.7.4.	Evolution du déplacement du centre de la plaque en fonction du temps: Identification du coefficient de contact k_i en recharge
fig.7.5.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Identification du coefficient de contact k_i en rechargement
fig.7.6.	Evolution du déplacement du centre de la plaque en fonction du temps: Identification du coefficient d'indentation critique α_{cr}
fig.7.7.	Evolution dans le temps de la force de contact: Identification du coefficient d'indentation critique α_{cr}
fig.7.8.	Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Identification des conditions aux limites imposées
fig.7.9.	Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence du type de conditions aux limites
fig.7.10.	Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Identification de la longueur effective de la plaque
fig.7.11.	Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Influence de la valeur de la rigidité à l'interface
fig.7.12.	Maillage progressif utilisé pour la convergence en fonction de la finesse du maillage
fig.7.13.	Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Convergence en fonction de la finesse du maillage

fig.7.14.	Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Divergence pour un maillage lâche
fig.7.15a.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $Y=0$ dans la première interface
fig.7.15b.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $Y=0$ dans la première interface
fig.7.16.	Evolution sur une longue période dans le temps de la contrainte transverse le long de $Y=0$ dans la première interface
fig.7.17a.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $Y=0$ dans la deuxième interface
fig.7.17b.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $Y=0$ dans la deuxième interface
fig.7.18a.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $X=0$
fig.7.18b.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse le long de $X=0$
fig.7.19a.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse à la limite intérieure autour de la zone de contact
fig.7.19b.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse à la limite intérieure autour de la zone de contact
fig.7.19c.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse à la limite intérieure autour de la zone de contact
fig.7.20a.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse à l'extérieur autour de la zone de contact
fig.7.20b.	Evolution dans le temps de la contrainte transverse à l'extérieur autour de la zone de contact
fig.7.21.	Influence de la masse du projectile sur la contrainte de cisaillement transverse autour de la zone de contact
fig.7.22.	Influence de la vitesse du projectile sur la contrainte de cisaillement transverse autour de la zone de contact
fig.7.23.	Influence de l'épaisseur de la plaque sur la contrainte de cisaillement transverse autour de la zone de contact
fig.7.24.	Influence de la rigidité d'interface sur la contrainte de cisaillement transverse autour de la zone de contact
fig.7.25.	Influence de la rigidité de contact sur la contrainte de cisaillement transverse autour de la zone de contact
fig.7.26a.	Mise en évidence de l'onde de déplacement selon $Y=0$
fig.7.26b.	Mise en évidence de l'onde de déplacement selon $Y=0$
fig.7.27.	Ondes de déplacement selon $Y=0$
fig.7.28a.	Ondes de contraintes selon $Y=0$
fig.7.28b.	Ondes de contraintes selon $X=0$
fig.7.29a.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion pendant les premiers instants de l'impact
fig.7.29b.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion pendant les premiers instants de l'impact
fig.7.29c.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion pendant les premiers instants de l'impact
fig.7.30a.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion à plus long terme
fig.7.30b.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion à plus long terme
fig.7.30c.	Effet de la masse du projectile sur les ondes de flexion à plus long terme
fig.7.31a.	Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion
fig.7.31b.	Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion
fig.7.31c.	Effet de la vitesse du projectile sur les ondes de flexion
fig.7.32a.	Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion
fig.7.32b.	Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion
fig.7.32c.	Effet de l'épaisseur de la plaque sur les ondes de flexion

-
- fig.7.33. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Contact multiple
fig.7.34. Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Influence de la masse du projectile
fig.7.35. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la masse du projectile
fig.7.36. Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile
fig.7.37. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de la vitesse du projectile
fig.7.38. Evolution de la flèche au centre de la plaque en fonction du temps: Influence de l'épaisseur de la plaque
fig.7.39. Evolution de la force de contact en fonction du temps: Influence de l'épaisseur de la plaque
fig.7.40. Relation entre force maximale et épaisseur

Annexes

- fig.A.1.1. Forme des éléments pour une géométrie bidimensionnelle
fig.A.1.2. Transformation géométrique τ^e

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

S. ABRATE (1991)

'Impact on laminated composite materials', *Applied mechanical review*, vol.44, n°4, April 1991, p.155-190.

S. ABRATE (1994)

'Impact on laminated composites: recent advances', *Appl. Mech. Review*, vol.47, n°11, p.517-544, 1994.

H. AGGOUR, C.T. SUN (1988)

'Finite element analysis of a laminate composite plate subjected to circularly distributed central impact loading'. *Computers and Structures*, vol. 28, n°6, pp. 729-736.

O. ALLIX (1989)

'Modélisation du comportement des composites stratifiés', Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1989.

W.E. BACHRACH, R.S. HANSEN (1988)

'Mixed finite element method for composite cylinder subjected to impact', *AIAA journal*, vol. 27, n°5, pp. 632-638.

K.J. BATHE, E.L. WILSON (1976)

'Numerical methods in finite element analysis', Prentice Hall, New Jersey, 1976

J.M. BERTHELOT (1992)

'Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures', Ed. Masson, Paris, 1992.

A.E. BOGDANOVISH, E.V. YARV (1991)

'Numerical analysis of the impact deformation of plates made of composites', *Mech. of Composite Mat.* 25(5), p.586-599.

R.B. BUCINELL, R.J. NUISMER, J.L. KOURY (1991)

'Response of composite plates to quasi-static impact events', *Composite materials: Fatigue and Fracture* (third volume), ASTM STP 1110, editor T.K. O'BRIEN, American Society for testing and materials, Philadelphia, 1991, p.528-549.

D.S. CAIRNS, P.A. LAGACE (1987)

'Thick composite plates subjected to lateral loading', *Journal of applied mechanics*, vol. 54, n°3, pp. 611-616. Sept. 1987.

D.S. CAIRNS, P.A. LAGACE (1989)

'Transient response of graphite-epoxy and kevlar-epoxy laminates subjected to impact', *AIAA journal*, vol. 27, n°11, pp. 1590-1596.

W.J. CANTWELL, J. MORTON (1989)

'Comparaison of the low and high velocity impact response of CFRP', *Composites*, vol. 20, n°6, pp. 545-551, Nov. 1989.

W.J. CANTWELL, J. MORTON (1991)

'The impact resistance of composite materials- a review', Composites, vol. 22, n°5, Sept. 1991, pp. 347-362.

G. CAPRINO, I. GRIVELLI-VISCONTI, A. DILLIO (1984)

'Elastic behaviour of composite structures under low velocity impact', Composites 15(3), pp. 231-234.

J.F. CARON (1993)

'Fissuration transverse des matériaux composites', Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.

P. CARREIRA

'Fissuration transverse et initiation du délaminage dans les stratifiés sous sollicitations de plaques', Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en cours.

A. CHABOT (1996)

'Analyse des efforts d'interface dans les structures en matériaux composites à l'aide de modélisations multiparticulaires des matériaux multicouhes', Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Soutenance prévue fin 1996.

F.K. CHANG, H.Y. CHOI, JENG (1990)

'Characterization of impact damage in laminated composites', 34th Int SAMPE Symp, Reno NV, May 8-11, p.702-713.

J.K. CHEN, C.T. SUN (1985a)

'Analysis of impact response of buckled composite laminates', Computers and Structures, 3, pp. 97-118.

J.K. CHEN, C.T. SUN (1985b)

'Dynamic large deflection response of composite laminate subjected to impact', Computers and Structures, 4(1), pp. 59-73.

J.K. CHEN, C.T. SUN, (1985c)

'On the impact of initially stressed composite laminates', Journal of composite materials, vol. 19, Nov. 1985, pp. 490-504.

P.C. CHOU, B.Jr. RODINI (1975)

'Laminated composites under impact loading', Proc. Intl. Conf. Composite Materials, 2, Metall; Soc. AIME, pp. 1106-1121.

T.S. CHOW (1971)

'On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load', Journal of Composite Materials, 5, pp. 306-319.

A.P. CHRISTOFOROU, S.R. SWANSON (1991)

'Analysis of impact response in composite plates', Int. J. Solids Struct. 27(2), p.161-170..

R.W. CLOUGH (1969)

'Analysis of structural vibration and response', in Recent advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design (Ed. R.H. Gallagher, Y. Yamata and J.T. Oden), Alabama Press, 1969, p.441-482.

N. CRISTESCU, L.E. MALVERN, R.L. SIERAKOWSKI (1975)

'Failure mechanisms in composite plates impacted by blunt-ended penetrators', In foreign object impact damage to composites, ASTM STP 568, ASME, Philadelphia, pp. 159-172.

- A.W. CROOK (1952)**
 'A study of some impacts between metal bodies by a piezoelectric method', Proceeding of the royal society, London, Series A, vol. 212, pp.377.
- I.M. DANIEL, T. LIBERT (1976)**
 'Wave propagation in fiber composite laminates', NASA C-135086, Juillet 1976.
- I.M. DANIEL, T. LIBERT, R.H. LABEDZ (1979)**
 'Wave propagation in transversely impacted composite laminates', Exp. Mech. 19(1), pp. 9-16.
- P. DESTUYNDER (1980)**
 'Sur une justification des modèles de plaque et de coque par les méthodes asymptotiques', Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, 1980.
- G. DHATT, G. TOUZOT (1984)**
 'Une présentation de la méthode des éléments finis', Maloine, Paris, 1984.
- A.L. DOBYNS, T.R. PORTER (1981)**
 'A study of the structural integrity of graphite composite structure subjected to low velocity impact', Polymer engineering and science, 21(8), p.493-498.
- H. DUMONTET (1990)**
 'Homogénéisation et effets de bord dans les matériaux composites', Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- A. EHRLACHER (1993)**
 'Modélisation multiphasique des matériaux multicouches', Cours de DEA 'Mécanique des Solides et des Structures, Option V, Chapitre VII, 1993.
- A. EHRLACHER, A. CHABOT, T.NACIRI (1994a)**
 'Prévision de l'initiation du délaminage', Rapport de fin de contrat SNECMA n°486, CERAM-ENPC, 1994.
- A. EHRLACHER, A. CHABOT, T.NACIRI, J.F. CARON (1994b)**
 'Analyse des efforts d'interface à l'aide de la Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches (M4), 9^{ème} Journées Nationales sur les Composites (JNC 9), Saint-Etienne, 22-24 Nov. 1994.
- K.E. FÄLLSTRÖM (1989)**
 'Transient bending waves in anisotropic plates studied by hologram interferometry', Journal of experimental mechanics, vol. 29, n°4, Dec.1989, pp. 409-413.
- S.R. FINN, G.S. SPRINGER (1993)**
 'Delamination in composite plates under transverse static or impact loads- a model, Composite Struct 23. p.177-190.
- G. FORET (1995)**
 'Effet d'échelle dans la rupture des composites unidirectionnels', Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- K.W.GARETT, J.E.BAILEY (1977)**
 'Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester', J. Mat. Scien., vol.12, 1977.
- W.E. GOLDSMITH (1960)**
 'Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids', Arnold, London.
- E.R. GREEN (1991a)**
 'Transient impact response of a fibre composite laminate', Acta Mech 86 (1-4), p.153-165.

- E.R. GREEN (1991b)**
 'The effect of different impact time histories on the response of a fibre composite plate', ASME publ NDE 10, Proc of WAM, Atlanta GA, Dec 1-6, p.9-21.
- L.B. GRESZCZUK (1982)**
 'Impact dynamics', Wiley, New-York, Chap. 3, pp.54-94.
- T.A. GUY, P.A. LAGACE (1992)**
 'Compressive residual strength of graphite-epoxy laminates after impact', Proc. of 9th DoD/NASA/FAA Conf on fibrous composites in Struc Des, DOT/FAA/CT-95-25, p.253-274.
- P. HAMELIN (1990)**
 'Comportement au choc des matériaux, application aux matériaux composites', Composites, n°3, p.146-151, Mai-Juin 1990.
- J. HARDING (1989)**
 'Impact damage in composite materials', Sci. and Engng of composite Mat. 1, 1989, p.41-68.
- E. HINTON, T.A. ROCK, O.C. ZIENKIEWICZ (1976)**
 'A note on mass lamping and related processes in the finite element method', Earth engineering Struct. Dyn. 4, p.245-249.
- T.J.R. HUGHES (1987)**
 'The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis', Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- S.P. JOSHI, C.T. SUN (1985)**
 'Impact induced fracture in a laminated composite', Journal of composite materials, vol.19, January 1985. p.51-66.
- K. KARAS (1939)**
 'Platten unter seitlichem stoss', Ingenieur Archiv 10, pp. 237-250.
- M.R. KARIM (1991)**
 'Impact response of a unidirectional composite laminate', JSME Int J, Series I 34(4), p;496-504.
- B.S. KIM, F.C. MOON (1977)**
 'Impact on multilayered composite plates', NASA CR-135247, Avril 1977.
- B.S. KIM, F.C. MOON (1979)**
 'Impact induced stress waves in an anisotropic plate', AIAA journal, 17, pp. 1126-1133.
- J.T. KUBO, R.B. NELSON (1975)**
 'Analysis of impact stress in composite plates', Foreign Object Impact Damage to Composites, ASTM STP 568, pp. 228-244.
- K.M. LAL (1983)**
 'Low velocity transverse impact behaviour of 8-ply graphite-epoxy laminates', Journal of reinforced plastics and composites, 2, pp. 216-225.
- H.L. LANGHAAR (1962)**
 'Energy Methods in Applied Mechanics', Wiley, New York, 1962.
- F.LECUYER. (1991)**
 'Etude des effets de bord dans les structures minces multicouches', Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1991.

- J.D. LEE, LIEBOWITZ H. (1984)**
 'Three-dimensional finite element and dynamic analysis of composite laminate subjected to impact', *Computers and Structures*, vol. 19, n°5/6, pp. 807-813.
- S.G. LEKHNITSKII (1963)**
 'Theory of elasticity of an anisotropic elastic body', Holden-Day, Inc., San Francisco, 1963.
- H.J. LIN, Y.J. LEE (1990)**
 'Use of statical indentation laws in the impact analysis of composite laminated plates and shells', *J. Appl. Mech.* 57(3), p.787-789.
- H.J. LIN, Y.J. LEE (1990)**
 'On the inelastic impact of composite laminated plate and shell structures', *comput Struct* 14, p.89-111.
- D. LIU (1988)**
 'Impact induced delamination -A view of bending stiffness mismatching', *Journal of composite materials*, vol.22, p.674-692.
- B.MACQUIRE, E.PETITPAS, D.VALENTIN (1992)**
 'Experimental and theoretical damage accumulation in glass-epoxy tubes under torsion loading', *Composites polymers*, Vol.5, n°3, 1992.
- L.E. MALVERN, R.L. SIERAKOWSKI, C.A. ROSS, N. CRISTESCU (1977)**
 'Impact failure mechanisms in fiber-reinforced composite plates', *Proc. IUTAM Symp. high velocity deformation of solids*, K. KAWATA and J. SHIOIRI ed., Tokyo, Aug 24-27, 1977.
- L.E. MALVERN, R.L. SIERAKOWSKI, C.A. ROSS (1979)**
 'Impact failure mechanisms in fibre-reinforced composite plates', *In high velocity deformation of solids*, Springer, Heidelberg, 1979.
- E.J. Mc QUILLEN, L.W. GAUSE, R.E. LLORENS (1976)**
 'Low velocity transverse normal impact of graphite-epoxy composite laminates', *Journal of composite materials*, 10, p.79-91, 1976.
- F.C. MOON (1972)**
 'Wave surfaces due to impact on anisotropic plates', *Journal of composite materials*, 6, pp. 62-79.
- F.C. MOON (1973a)**
 'One-dimensional transient waves in anisotropic plates', *J applied Mech., Trans. ASME*, 95, pp. 485-490.
- F.C. MOON (1973b)**
 'Theoretical analysis of impact in composite plates', *NASA CR-121110*.
- F.C. MOON (1973c)**
 'Stress wave calculations in composite plates using the Fast Fourier Transform', *Computers Struc.*, 3, pp. 1195-1204.
- A.W.H. MORRIS, R.S. SMITH (1971)**
 'Some aspects of the evaluation of the impact behaviour of low temperature fiber composites', *Fibre sci. tech.*, 3, pp. 219-242.
- T. NACIRI, A. EHRLACHER, A. CHABOT (1996)**
 'Interlaminar stress analysis with a new multiparticulate modelisation of multilayered materials (M4)', *Proposé pour publication*, 1996.

- R. OLSSON (Oct. 1990)**
 'Pilot study of dynamic impact response of a composite plate', FFA TN 1990-27, The aeronautical research institute of Sweden, Stockholm.
- R. OLSSON (1991a)**
 'Experimental verification of a theory for the impact response of composite plates', FFA-TN 1991-17, The aeronautical research institute of Sweden, Stockholm, 1991.
- R. OLSSON (1991b)**
 'Theory and experimental verification of the impact response of composite plates', Engineering science preprint 28.91022, 28th annual technical meeting of the society of engineering science, 6-8 nov. 1991, Gainesville, FL.
- R. OLSSON (1992a)**
 'Impact response of composite laminates- A guide to closed form solutions', FFA TN 1992-33, The aeronautical research institute of Sweden, Stockholm.
- R. OLSSON (1992b)**
 'Impact response of orthotropic composite plates predicted from a one-parameter differential equation', AIAA journal, vol. 30, n°6, pp. 1587-1596, Juin 1992.
- R. OLSSON (1994)**
 'simplified theory for contact indentation of sandwich panels', FFA TN 1994-33, The aeronautical research institute of Sweden, Stockholm.
- N.J. PAGANO (1970)**
 'Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates', J. Composite Mat., Vol.4, p.20-34, 1970.
- N.J. PAGANO (1978)**
 'Stress fields in composite laminates', Int; J. Solids Structures, vol.14, p.385-400.
- N.J. PAGANO, S.R. SONI (1983)**
 'Global-local variational model', Int; J. Solids Structures, vol.19, n°3, p.207-228.
- B.R. PETERSEN (1985)**
 'Finite element analysis of composite plate impacted by a projectile', Ph.D. dissertation, department of Engineering Sciences, University of Florida, 1986.
- M.H. PHILIPPE (1996)**
 'Approche du comportement en raideur des structures composites fléchissantes par un modèle multiparticulaire'. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Soutenance prévue fin 1996.
- C.B. PRASAD, D.R. AMBUR, J.H. STARNES (1993)**
 'Response of laminated composite plates to low-speed impact by airgun-propelled and dropeed-weight impactors', 34th Struct. Structural Dyn and Mat Conf, La Jolla CA, Pt2, p.887-900.
- W.H. PRESS, B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING (1992)**
 'Numerical recipes', Press syndicate of the university of Cambridge, New-York, 1992.
- J.L. PRESTON Jr., T.S. COOK (1975)**
 'Impact response of graphite/epoxy flat laminates using projectiles that simulate aircraft Engine Encounters', Foreign object impact damage to composites. ASTM STP 568, p.49-71, 1975.
- A.H. PUPPO, H.A. EVENSON (1970)**
 'Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress', J. composite materials, vol.4, p.204-220, April 1970.

- Y. QIAN, S.R. SWANSON (1990)**
 'A comparison of solution techniques for impact response of composite plates', Composite Structures, vol. 14, n°3, pp. 177-192.
- I.S. RAJU, J.H. CREWS (1982)**
 'Three-dimensional analysis of [0/90]_s and [90/0]_s laminates with a central circular hole', Composites technology review, vol.4, n°4, Winter 1982, p.116-124.
- R.L. RAMKUMAR, P.C. CHEN (1983)**
 'Low velocity impact response of laminated plates', AIAA journal, 21, pp. 1448-1452.
- G.D.RENIERI, C.T. HERAKOVICH (1976)**
 'Non linear analysis of laminated fibrous composites', VPI-E-76-10, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1976.
- E.F. RYBICKI (1971)**
 'Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading', J. Composite Materials, Vol.5, 1971.
- C.A. ROSS, N. CRISTESCU, R.L. SIERAKOWSKI (1976)**
 'Experimental studies on failure mechanisms of impacted composite plates', Fibre Sci. Technol. 9, 1976.
- C.A. ROSS, L.E. MALVERN, R.L. SIERAKOWSKI, N. TAKEDA (1985)**
 'Finite element analysis of interlaminar shear stress due to local impact', ASTM STP 864, pp. 355-367.
- B.V. SANKAR, C.T. SUN (1985)**
 'Efficient numerical algorithm for transverse impact problems', Computers and Structures, 20(6), pp. 1009-1012.
- W. SHEN, C. WU (1992)**
 'Computer simulation for damage-failure process of composite plate under high speed impact', Eng Fracture Mech 47(1-3), p.159-176.
- K.N. SHIVAKUMAR, W. ELBER, W. ILLG (1985)**
 'Prediction of impact force and duration due to low velocity impact on circular composite laminates', Journal of applied mechanics, vol. 52, n°3, pp. 674-680.
- R.L. SIERAKOWSKI, L.E. MALVERN, C.A. ROSS (1976)**
 'Dynamic failure modes in impacted composite plates', Failure modes in composite, Chiao, T.T., ed., AIME. p.73-88, 1976.
- P.O. SJÖBLOM, I.T. HARTNESS, T.M. CORDELL (1988)**
 'On low velocity impact testing of composite materials', Journal of composite materials, vol. 22, n°1, pp. 30-52.
- M. SMAOUI (1993)**
 'Modélisation multiphasique des matériaux composites pour les problèmes de dynamique rapide', Mémoire de DEA 'Mécanique des Solides et des Structures'. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993.
- R.L.SPILKER, S.C.CHOU (1980)**
 'Some new results on edge effect in symmetric composite laminates', J; of Composite Materials, Vol.11.p.92-106, 1980.
- C.T. SUN, R.Y.S. LAI (1974)**
 'Exact and approximate analyses of transient wave propagation in an orthotropic plate', AIAA journal, 12(10), pp. 1415-1417.

- C.T. SUN, S. CHATTOPADHYAY (1975)**
 'Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass', Journal of applied mechanics, vol.43, n°3, pp. 693-698.
- C.T. SUN, W.J. LIOU (1989)**
 'Investigation of laminated composite plates under impact dynamic loading using a three-dimensional hybrid stress finite element method', Composite and Structures, vol. 33, n°3, pp. 879-884.
- N. TAKEDA (1980)**
 'Experimental studies on the delamination mechanisms in impacted fiber-reinforced composite plates', Ph.D. dissertation, University of Florida, Gainesville, FL.
- N. TAKEDA, R.L. SIERAKOWSKI (1980)**
 'Localized impact problems of composite laminates', Shock and vibration Digest, 12(8), pp. 3-10.
- N. TAKEDA, R.L. SIERAKOWSKI, L.G. MALVERN (1981a)**
 'Wave propagation experiments on ballistically impacted composite laminates', Journal of composite materials, 15, pp. 157-173.
- N. TAKEDA, R.L. SIERAKOWSKI, L.E. MALVERN (1981b)**
 'Studies of impacted glass fiber-reinforced composite laminates', SAMPE Quarterly, 12, pp. 9-17.
- N. TAKEDA, R.L. SIERAKOWSKI, L.E. MALVERN (1981c)**
 'Experimental impactor/plate configuration interaction studies of impacted glass fiber-reinforced composite laminates', SAMPE Quarterly.
- N. TAKEDA, R.L. SIERAKOWSKI, C.A. ROSS, L.E. MALVERN (1982)**
 'Delamination-crack propagation in ballistically impacted glass/epoxy composite laminates', Experimental mechanics, 22(1), p.19-25, 1982.
- T.M. TAN, C.T. SUN (1985)**
 'Use of statical indentation law in the impact analysis of laminated composite plates', Journal of applied mechanics, vol. 52, pp. 693-698.
- S. TIMOSHENKO (1913)**
 'Zür frage nach der wirkung eines stosse auf einer balken', Zeitschrift für mathematik und physik, vol. 62, pp. 198-209.
- S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG, W. WEAVER Jr. (1974)**
 'Vibration problems in Engineering', Fourth Edition, Wiley, New York, 1974.
- D.A. TROWBRIDGE, J.E. GRADY, R.A. AIELLO (1991)**
 'Low velocity impact analisys with NASTRAN', Comput. Struc. 40(4), p.977-984.
- A.S.D. WANG, F.W. CROSSMAN (1977)**
 'Some new results on edge effect in symmetric composite laminates', J. composite materials, 11, 92, 1977.
- K. WASHIZU (1969)**
 'Some remarks on basic theory for finite elemnt method', in Recent advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design (Ed. R.H. Gallagher, Y. Yamata and J.T. Oden). Alabama Press, 1969, p.25-46.

- J.M. WHITNEY, N.J. PAGANO (1970)**
 'Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates', J. applied Mech., Trans. ASME, 92, pp. 1031-1036.
- J.R. WILLIS (1966)**
 'Hertzian contact of anisotropic bodies', Journal Mech. Phys. Solids. 14, pp. 163-176.
- E. WU, K. SHYU (1993)**
 'Response of composite laminates to contact loads and relationship to low-velocity impact', Journal of Composite Materials, vol. 27, n°15, pp. 1443-1464.
- E. WU, C.S. YEN (1994)**
 'The contact behaviour between laminated composite plates and rigid spheres', ASME journal of applied mechanics.
- H.T.WU, G.S. SPRINGER (1988)**
 'Impact induced stresses, strains and delaminations in composite plates', Journal of composite materials, vol. 22, pp. 518-533.
- H.Y.T. WU, F.K. CHANG (1989)**
 'Transient dynamic analysis of laminated plates subjected to transverse impact', Computers and Structures, vol. 31, n°3, pp. 453-466.
- S.H. YANG (1981)**
 'Static and dynamic contact behaviour of composite laminates', Ph.D. dissertation, Perdue University, West Lafayette, Ind.
- P.C. YANG, C.H. NORRIS, Y. STAVSKY (1966)**
 'Elastic wave propagation in heterogeneous plates', Intl. journal Solids Struc., 2, pp.665-684.
- S.H. YANG, C.T. SUN (1982)**
 'Indentation law for composite laminates', ASTM STP 787, pp. 425-449.
- C. ZENER (1941)**
 'The intrinsic inelasticity of large plates', Physical Review, Vol.59, p.669-673 Avril 1941..